

"Строительная механика самолета"



ЛА — самолет, вертолет, дирижабль, ракета или космический корабль — **должен** воспринимать действующие на него в процессе эксплуатации нагрузки без повреждений и недопустимых изменений формы, т.е. **быть достаточно прочным и жестким**. (Это необходимое условие безопасной эксплуатации любого инженерного сооружения.) Конструкция ЛА должна отличаться еще и **минимальной массой**.

Требования минимальной массы находятся в противоречии с требованиями достаточной прочности и жесткости. Разрешение этого противоречия является одной из основных проблем, возникающих при создании ЛА; оно осуществляется в процессе расчета, проектирования и экспериментальной отработки как конструкции в целом, так и отдельных ее элементов и обуславливает эффективность ЛА.

Решение проблемы определяется:

- **степенью полноты и достоверности информации**, которой располагает конструктор относительно взаимосвязи между геометрическими параметрами конструкции;
- **свойствами материала**;
- **допустимым уровнем нагружения** конструкции.

Эта взаимосвязь формируется в процессе расчета на прочность ЛА и его элементов.

Расчет на прочность предусматривает:

- *определение расчетных нагрузок*;
- *выбор расчетных схем и моделей*, адекватно описывающих реальные элементы конструкции;
- *анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), устойчивости и динамического поведения* отдельных моделей и их совокупности;
- *переход от расчетных моделей к реальным объектам* и оценку их работоспособности.

Причины появления строительной механики:

- *наличие широкого класса расчетных схем*, моделирующих элементы конструкций самого разнообразного назначения;
- *наличие специальных* (требующих достаточно сложного математического аппарата) *методов*, необходимых для решения вопросов о НДС, устойчивости и динамическом поведении моделей.

Строительная механика — это наука о принципах и методах определения напряженно-деформированного состояния типовых расчетных моделей, анализа их устойчивости и динамического поведения.

Формирование строительной механики связано с именами выдающихся ученых и инженеров И.Г. Бубнова, Б.Г. Галёркина, А.Н. Крылова, С.П. Тимошенко.

Развитие ряда направлений строительной механики по расчету летательных аппаратов, судов, наземных транспортных средств и сооружений связано с работами советских ученых В.В. Болотина, В.З. Власова, А.А. Гвоздева, А.Н. Динника, А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, А.И. Лурье, В.В. Новожилова, П.Ф. Папковича, Ю. Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, И.М. Рабиновича, А.Ф. Смирнова, Н.С. Стрелецкого, В.И. Феодосьева, Ю.А. Шиманского и др.

Отличие строительной механики ЛА отличается от других направлений этой науки:

– *анализом тонкостенных конструкций;*

– *повышенными требованиями к точности расчетных методов* (с учетом ограничений массы конструкции должны гарантировать ее безопасную работу на пределе возможностей материала).

Успехи в развитии строительной механики в нашей стране связаны с работами Л.И. Балабуха, А.С. Вольмира, Э.И. Григолюка, С.Н. Кана, В.И. Климова, К.С. Колесникова, Ю.Г. Одинокова, А.Ю. Ромашевского, И.А. Свердлова, В. М. Стригунова и др.

Наряду с аналитическими методами исследования традиционных расчетных моделей интенсивно развиваются численные методы расчета сложных систем с помощью ЭВМ.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ПО ЭЛЕМЕНТАМ КОНСТРУКЦИИ

1. ПРОСТЕЙШИЕ СИЛОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИИ ЛА

1. **Основной задачей** инженера, проектирующего силовую схему ЛА – **создание легкой конструкции**, воспринимающей эксплуатационные нагрузки, не разрушаясь и не изменяя первоначально заданных размеров и формы.

Всякая конструкция под нагрузкой деформируется.

Чем больше жесткость, конструкции, тем меньше испытываемые ею деформации.

На практике **добиваются жесткости, гарантирующей невозможность появления в эксплуатации больших деформаций**, мешающих нормальной работе ЛА.

От жесткости аппарата в целом и каждой из его частей **зависит его поведение при действии динамической**. Неправильный выбор жесткостных характеристик ЛА может привести к возникновению больших колебаний и разрушению конструкции (при полете с большой скоростью или при посадке).

Для конструкции ЛА характерно применение оболочек с тонкой стенкой. *Тонкостенные оболочки* (в отличие от массивных конструкций) *не могут воспринимать сосредоточенных сил и моментов*, возникающих в местах прикрепления различных агрегатов и в местах сочленения отдельных частей конструкции. *Она приспособлена для восприятия распределенных сил* (давления или сил инерции).

Для восприятия оболочки сосредоточенных сил, **необходимо** в местах их приложения **создать надежно подкрепленные, неподвижные опорные точки** (узлы), используя **специальные силовые элементы**.

Основные силовые элементы конструкции могут иметь разнообразные размеры и форму.

К ним относятся **СТЕРЖНИ, БАЛКИ, ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ.**

Сочетания этих элементов образуют силовые схемы отдельных агрегатов ЛА.

Силовые схемы агрегатов, соединяясь между собой надлежащим образом, образуют силовую схему ЛА.

Соединение элементов в силовую схему агрегата и соединение агрегатов между собой должно обеспечить **жесткость и неизменяемость конструкции**, а размеры элементов выбираются так, чтобы **гарантировать их прочность при действии эксплуатационных нагрузок**.

2. Особенности работы элементов конструкции под нагрузкой и основные принципы создания силовых схем, обеспечивающих жесткость и неизменяемость конструкции

Стержни и балки применяются в качестве *подкрепляющих или соединительных элементов*.

Стержнем принято считать всякую деталь удлиненной формы, которая имеет малую жесткость на изгиб и кручение и вследствие этого работает главным образом на растяжение или сжатие.

Поперечное сечение стержней, применяемых в авиационных конструкциях, большей частью тонкостенное незамкнутое (угольники, тавры, швеллеры), иногда – трубчатое.

Длина стержня значительно (в десятки, сотни раз) больше его поперечных размеров.

Для обеспечения **выгодных условий нагружения** стержней (нагрузку продольными силами), их концы снабжают шарнирами (цилиндрические или шаровые шарниры), исключая передачу изгибающего и крутящего моментов.

Когда *конец стержня жестко защемлен*, он может передавать небольшой изгибающий момент, но **основными (расчетными) напряжениями** все же будут напряжения σ от растяжения (сжатия).

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad , \quad (1.1)$$

где N – продольная сила;

F – площадь поперечного сечения стержня.

В случае сжатия стержень необходимо проверить на устойчивость по формуле Эйлера.

Если критические напряжения $\sigma_{кр}$ не превосходят предела пропорциональности $\sigma_{пл}$ материала:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad , \quad (1.2)$$

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} \quad - \text{гибкость стержня};$$

l – приведенная длина стержня (определенная с учетом условий закрепления концов);

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} \quad - \text{минимальный радиус инерции сечения стержня};$$

I – минимальный момент инерции сечения стержня;

E^{min} – модуль упругости материала стержня.

Если действующие напряжения больше предела упругости, то расчет на устойчивость ведут по эмпирической формуле

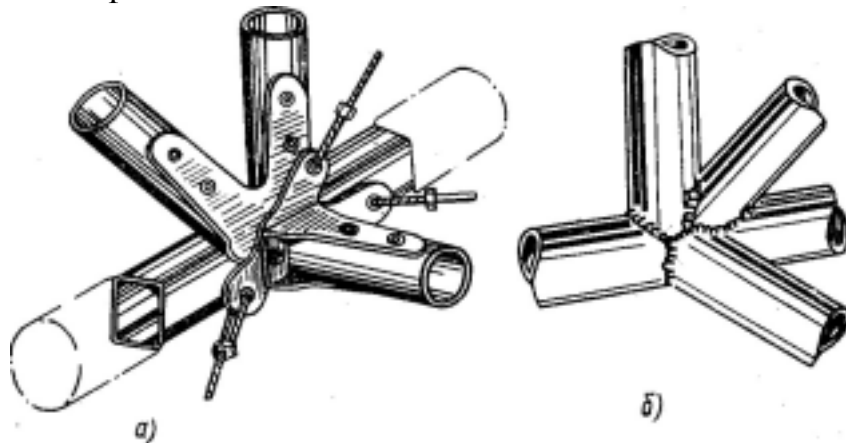
$$\sigma_{кр} = \sigma_{\sigma} \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2} \quad , \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\kappa} - \text{критические напряжения, } \nu = \frac{\sigma_{\sigma}}{\sigma_{\sigma}} ;$$

σ_{σ} – временное сопротивление материала стержня;

σ_{σ} – критические напряжения, вычисляемые по формуле Эйлера (1.2).

При соединении нескольких стержней в один узел, на который действует внешняя сила, **следует располагать стержни** таким образом, чтобы их оси пересекались в точке, лежащей на линии действия внешней силы (избежать внецентренного нагружения стержней и сводит к минимуму возможные дополнительные напряжения изгиба).

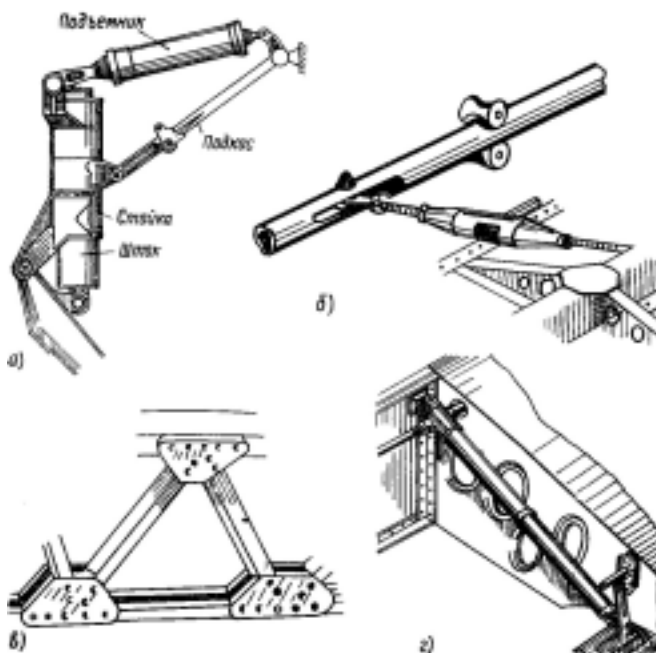


a – клепаный многостержневой узел; *б* – сварной узел

Рис. 1.

При правильном расположении стержней узел считают **шарнирным**, несмотря на наличие жесткой косынки или сварных швов, соединяющих стержни.

Примеры применения стержней в авиационных конструкциях



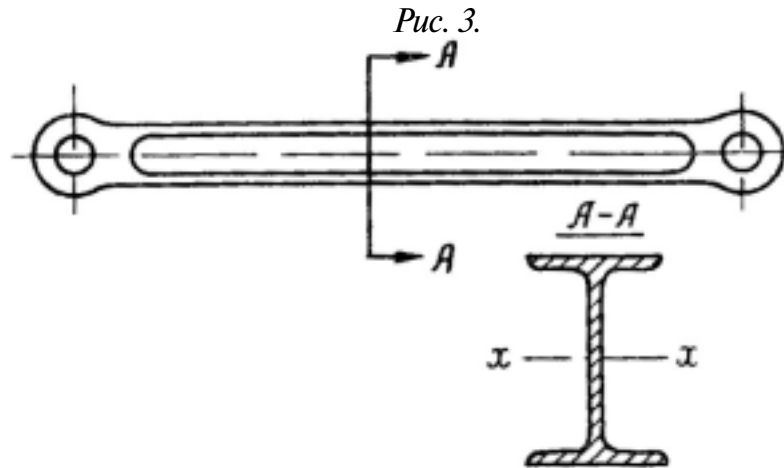
a – подкосы шасси самолета;
б – штоки и цилиндры гидравлических подъемников; *г* – тяги проводки рулевого управления; *д* – раскосы ферменных нервюр

Рис. 2.

3. **Балка** (в отличие от стержня), представляет собой **конструктивный элемент, способный воспринимать изгибающие моменты.**

Сечение балки выбирается так, чтобы обеспечить наибольшую жесткость изгиба в плоскости действия наибольших эксплуатационных нагрузок.

Наиболее **рациональной формой сечения балки является двутавр** (рис. 3). При малом весе имеет большим моментом инерции I и большой момент сопротивления W относительно оси $x-x$, перпендикулярной x плоскости действия внешних сил P , x изгибающих балку (рис. 4).



Расчетные напряжения в балках определяются по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}, \quad (1.4)$$

где M_{max} – максимальный изгибающий момент.

Балка одновременно может воспринимать еще и продольную силу N (рис. 4). Расчетные напряжения вычисляются по формуле для продольно-поперечного изгиба

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_p + Nf}{W_x}, \quad (1.5)$$

M – максимальный изгибающий момент от поперечной нагрузки;
 f – наибольший прогиб балки (плечо силы N , создающей дополнительный изгибающий момент).

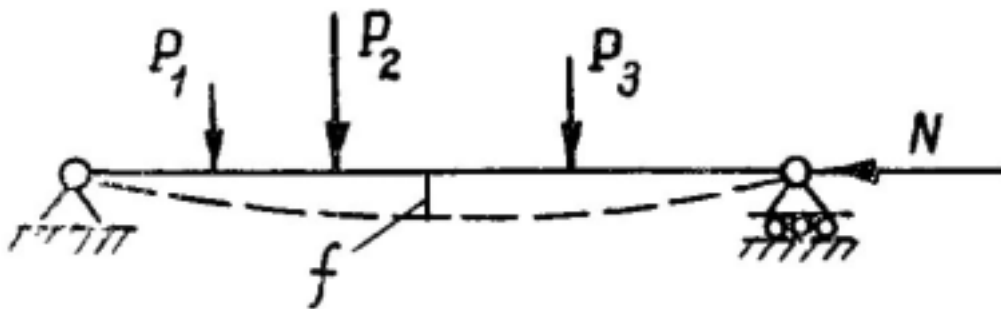


Рис. 4.

Для двухопорных балок, изгибаемых поперечной нагрузкой, направленной в одну сторону, величину прогиба f можно вычислить по приближенной формуле

$$f = \frac{f_p}{1 - \frac{N}{N_{\sigma}}} \quad (1.6)$$

f – наибольший прогиб балки, вызванный действием только поперечной нагрузки;

$N = \sigma F$ – критическая сила при выпучивании балки в плоскости действия поперечной нагрузки.

Напряжение σ вычисляется по формуле (1.2).

Если балка подвергается действию продольной сжимающей силы, то, кроме расчета на прочность, обязательна проверка ее устойчивости.

При достаточной прочности, но недостаточной устойчивости балки приходится ставить дополнительные боковые связи, уменьшающие свободную длину поясов балки и увеличивающие их критическую силу.

Как **балки** работают **лонжероны** крыльев малой толщины, подкрепляющие элементы крыла (подкосные балки, рис. 5) и фюзеляжа, лонжероны рулей и оперения. Стойка шасси – балка трубчатого сечения, работающая на изгиб со сжатием при посадке с лобовым или боковым ударом.

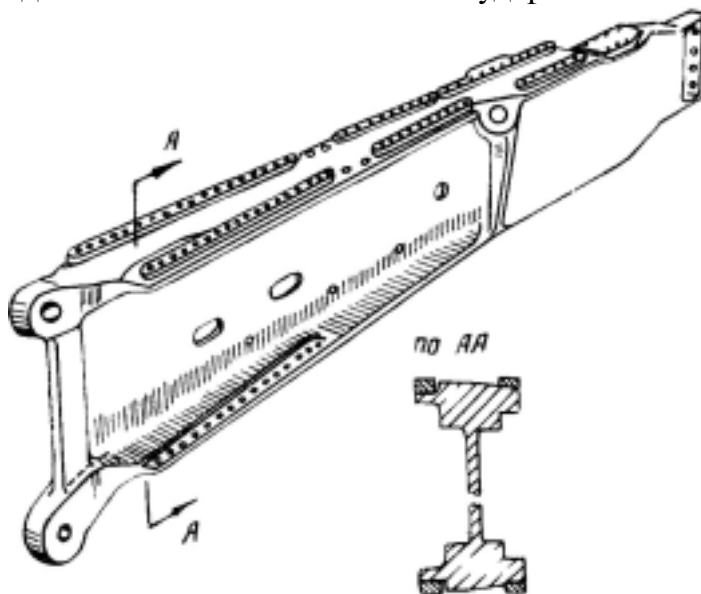


Рис. 5

Балки плохо работают на кручение (сечения, рациональные с точки зрения их работы на изгиб, имеют малый момент сопротивления кручению (за исключением трубчатого сечения).

При передаче крутящего момента балку разгружают от кручения с помощью дополнительных силовых элементов, либо использовать для передачи крутящего момента сочетание двух или нескольких параллельных балок, воспринимающих кручение за счет изгиба в разных направлениях.

При расчете балок пренебрегают их жесткостью на кручение (считают, что они работают только на продольно-поперечный изгиб).

Разделение удлиненных элементов на стержни и балки является условным и зависит не только от формы и размеров элемента, но и от способа нагружения, характера закрепления (его действительной роли в конструкции).

Один и тот же элемент в разных условиях может работать и как стержень, и как балка в зависимости от соотношения величин приложенных к нему продольных и поперечных сил.

Пример:

Стержни верхнего пояса фермы (рис. 6, а), нагружены только узловыми нагрузками, работают только на сжатие. Если кроме сосредоточенных сил, на верхний пояс действует распределенная нагрузка p (рис. 6, б), то элементы этого пояса работают как балки и размеры элементов пояса определяются величиной поперечной нагрузки p , а не узловыми нагрузками P_1, P_2, P_3 .

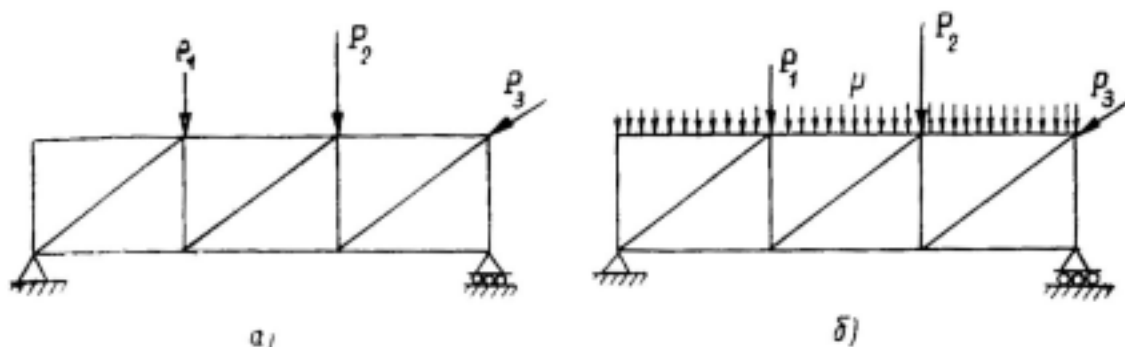


Рис. 6

4. Пластины характерный элемент конструкции летательного аппарата. Это не только обшивка крыла, фюзеляжа и оперения, но и тонкие стенки и перегородки (диафрагмы), устанавливаемые внутри конструкции. Стенки нервюр (рис. 7, а) и шпангоутов (рис. 7, в), стенки лонжеронов крыла (рис. 7, б), створки и крышки люков — тонкие пластины, работающие совместно с подкрепляющими их стержнями и балками.

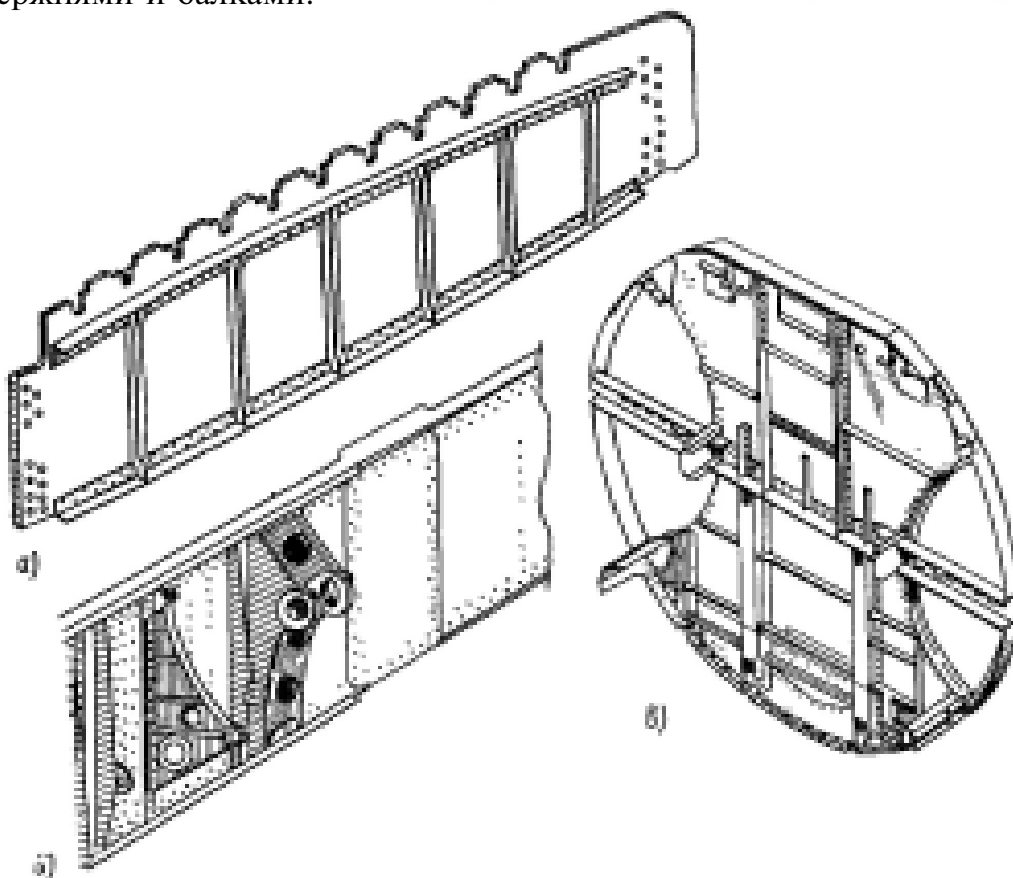


Рис. 7

Особенность тонких пластинок – способность воспринимать только распределенные усилия, лежащие в их плоскости.

Сосредоточенные силы и распределенные усилия, перпендикулярные плоскости пластинки, вызывают в тонких пластинках большие напряжения и деформации.

Пластинки обладают **большой жесткостью на сдвиг** и служат основным элементом авиационной конструкции, воспринимающим погонные сдвигающие усилия q (рис. 8, а).

Могут также работать **на растяжение**, если растягивающие усилия приложены в их срединной поверхности (рис. 8, б).

Жесткость реальных пластинок на растяжение значительно уменьшается благодаря неизбежному наличию начальной волнистости (рис. 8, в).

Пластинка не сможет воспринять больших растягивающих усилий до тех пор, пока начальная волнистость не исчезнет под действием внешней нагрузки (пока не произойдет «обтяжка» пластинки).

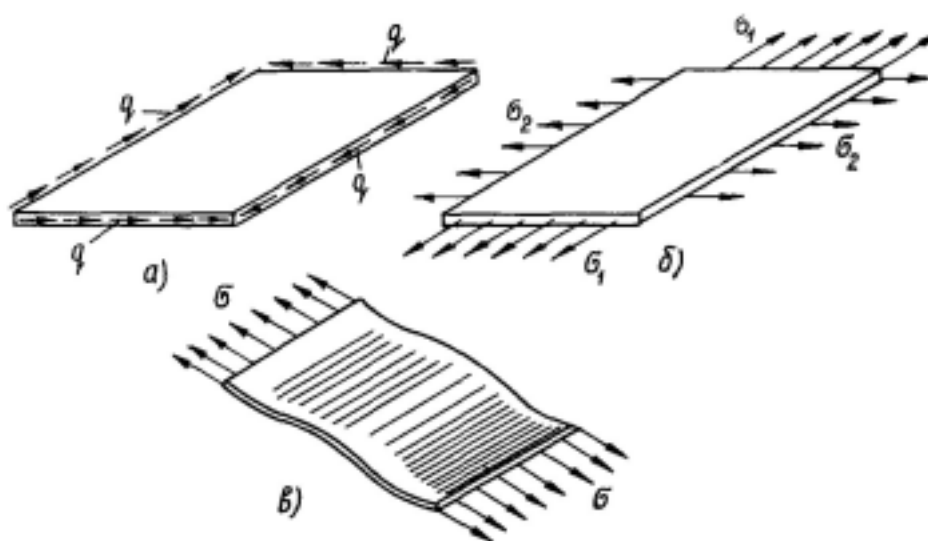


Рис. 8

Тонкие пластинки плохо работают на изгиб, кручение и сжатие (потеря устойчивости и выпучивание).

Опертая по краям пластинка воспринимает небольшую распределенную поперечную нагрузку p (рис. 9). Возникающие напряжения изгиба (особенно – прогибы) оказываются очень большими при сравнительно малом давлении p .

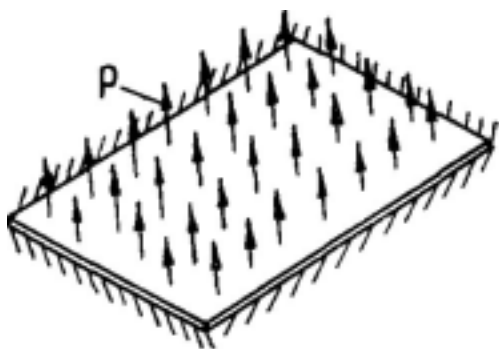


Рис. 9

Пример:

$p = 0,4 \text{ кг/см}^2$ вызывает в толстой дуралюминовой квадратной пластинке (размер стороны – 30 см, толщина $\delta = 0,6 \text{ см}$) напряжения $\sigma = 300 \text{ кг/см}^2$ и наибольший прогиб $f = 10 \text{ мм}$.

Пластинку, нагруженную нормальными к поверхности силами (обшивку), приходится подкреплять часто расположенными ребрами, воспринимающими основную часть изгибающего момента.

Пластинки – удобный конструктивный элемент:

- имеют малый вес;
- обеспечивают создание поверхности, воспринимающей аэродинамические силы;
- защищают внутреннюю полость конструкции от воздействия внешней среды.

Конструктивное применение пластинок затрудняется тем, что они **не могут воспринимать сосредоточенных усилий**.

Сосредоточенная сила, даже лежащая в плоскости пластинки, вызывает большие местные деформации (смятие или вытягивание материала) и разрушение конструкции.

Для передачи сосредоточенных сил на тонкую стенку приходится применять **специальные конструктивные меры**, обеспечивающие включение в работу значительной части пластинки.

Утолщение самой пластинки в месте приложения силы *ведет* к недопустимому *усложнению технологии производства*.

Распространенным приемам является:

- окантовка пластинки стержнями;
- приклепывание к пластинке стоек в месте приложения сосредоточенной силы.

5. Оболочки – элементы, имеющие вид криволинейных поверхностей.

Наиболее употребительны оболочки, имеющие форму тел вращения:

- сферические;
- цилиндрические;
- в виде усеченного конуса.

Оболочки в чистом виде (встречаются в конструкции двигателей ЛА):

- кожух и внутренний обтекатель входного устройства двигателя;
- корпус компрессора, камеры сгорания;
- форсажные камеры;
- сопла, выхлопные и удлинительные трубы.

Оболочками являются топливные баки, воздушные баллоны, гидро-аккумуляторы.

Обшивку фюзеляжа и криволинейной части **крыла** можно также рассматривать как **оболочку, подкрепленную** с внутренней стороны продольным и поперечным **силовыми наборами**.

Для уменьшения веса конструкции оболочки делать тонкими (не могут воспринимать больших изгибающих моментов и легко теряют устойчивость при сжатии).

Оболочки, как и пластинки, воспринимают сдвигающие и растягивающие силы, действующие в их срединной поверхности.

Незамкнутая цилиндрическая оболочка хорошо **работает на растяжение** вдоль образующей (рис. 10, а) и **на сдвиг** (рис. 10, б) под действием усилий, распределенных вдоль ее краев.

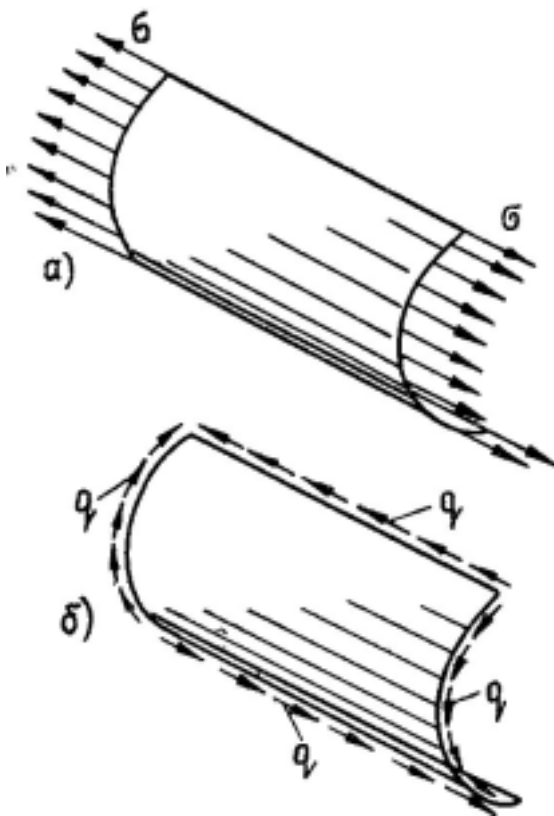


Рис. 10

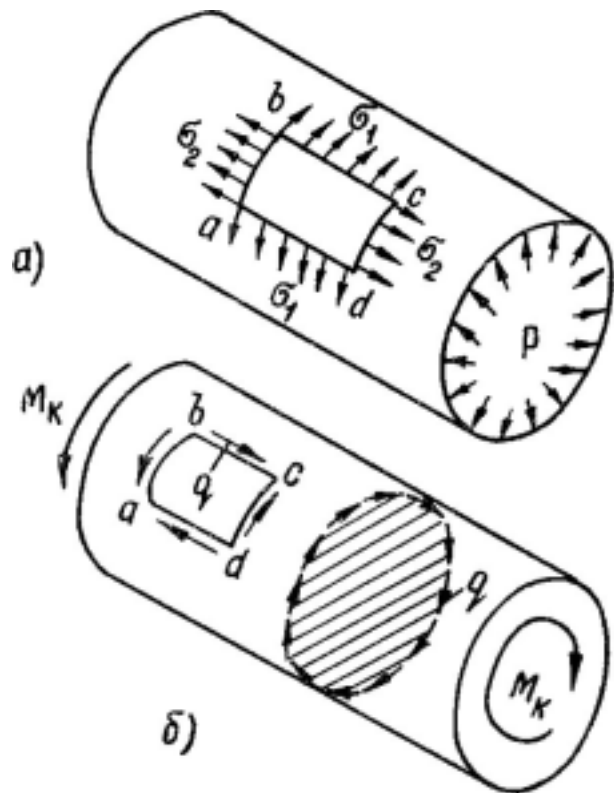


Рис. 11

Замкнутая осесимметричная оболочка способна воспринимать внутреннее давление p (рис. 11, а) и крутящий момент M_k (рис. 11, б).

В первом случае стенка оболочки работает на растяжение в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Напряжения σ_1 и σ_2 , возникающие в элементе $abcd$, показаны на рис. 11, а.

Во втором случае крутящий момент вызывает появление касательных усилий q , которые образуют в поперечном сечении замкнутую цепочку; стенка оболочки работают на сдвиг (см. элемент $abcd$ на рис. 11, б).

Замкнутая цепочка сил, лежащих в плоскости эквивалентна паре сил (см. теоретическую механику). Эта пара внутренних сил уравнивает крутящий момент M_k приложенный к оболочке.

Если **оболочка незамкнутая**, то сдвигающие силы, действующие в срединной поверхности оболочки, **не образуют замкнутой цепочки и не приводятся к паре сил**. Они не могут уравновесить крутящий момент M_k .

Незамкнутые оболочки не могут работать на кручение.

Небольшой крутящий момент, действующий на незамкнутую оболочку, вызывает большие напряжения и большие углы закручивания.

Плохая работа тонкостенных оболочек на изгиб объясняется появлением сжимающих напряжений и местной потерей устойчивости (смятием) сжатой зоны оболочки (рис. 12. в).

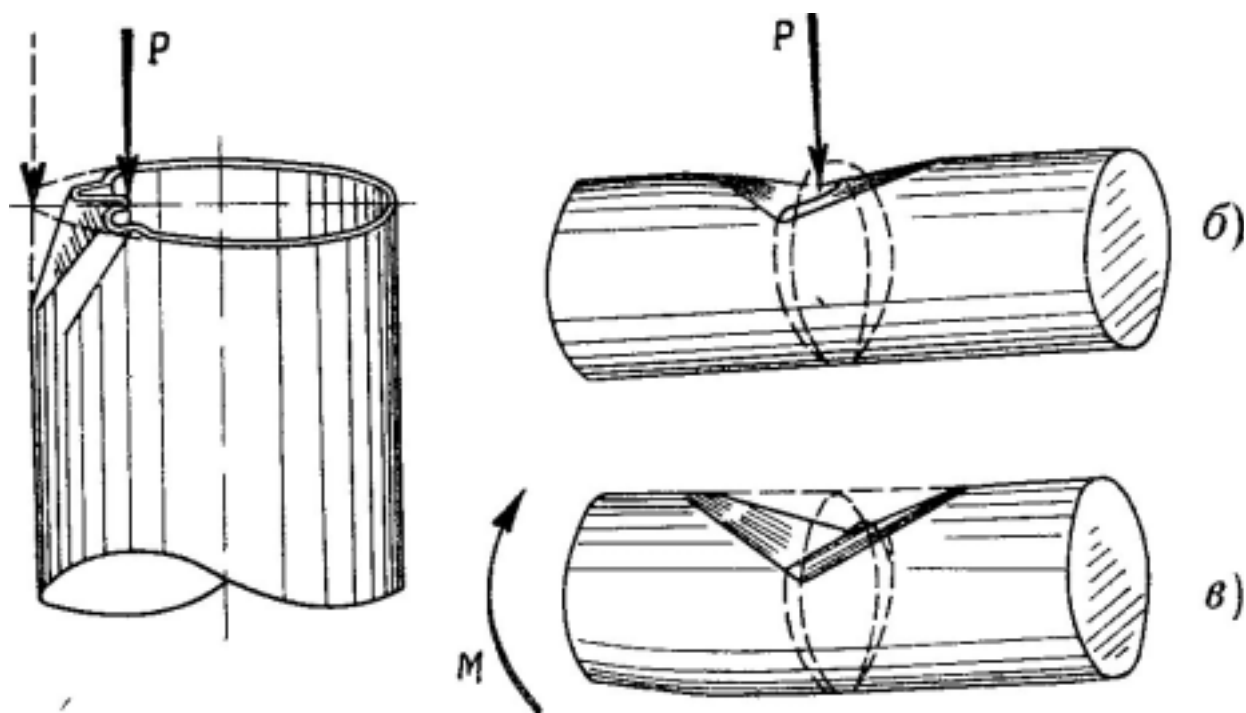


Рис. 12

Использование тонкостенных оболочек ставит перед конструктором задачу о рациональной передаче на конструкцию сосредоточенных сил.

Непосредственное приложение сосредоточенных сил к оболочке недопустимо, так как ведет к большим местным деформациям и разрушению оболочки (рис. 12, *a* и *б*).

Места соединения оболочек или точки прикрепления к оболочке каких-либо грузов и агрегатов приходится усиливать с помощью стержней или рам (лонжероны, стрингеры, нервюры, шпангоуты).

Основные принципы соединения простейших элементов в силовую схему

2. ОБРАЗОВАНИЕ УЗЛОВ

6. Для создания рациональной силовой схемы ЛА необходимо добиваться такого взаимного расположения и соединения простейших силовых элементов, при котором каждый из них выполняет свойственную ему функцию, а конструкция в целом обладает требуемой прочностью и жесткостью.

В дальнейшем, пренебрегая второстепенными напряжениями, которые могут возникать в конструктивных элементах благодаря различию между идеализированной схемой и реальной конструкцией, будем считать, что стержни могут воспринимать только растяжение или сжатие, балки – только изгиб (поперечный или продольно-поперечный), тонкие стенки – сдвиг, а трубы и замкнутые оболочки – кручение и внутреннее (или внешнее) давление.

В конструкции перечисленные элементы соединяются таким образом, чтобы обеспечить нормальную работу силовой схемы для всех возможных случаев нагружения.

Сосредоточенные силы действуют в узлах, соединяющих между собой отдельные части конструкции, или в местах прикрепления к конструкции каких-либо грузов, приборов или агрегатов.

В точках приложения сосредоточенных сил приходится создавать конструктивные узлы, способные воспринять силу и распределить ее по тонкостенным элементам конструкции.

Всякая авиационная конструкция имеет ограниченное количество точек (узлов), способных воспринимать сосредоточенные силы.

Конструктивные элементы, подкрепляющие узел, при расчете заменяются соответствующей системой стержней.

7. **Плоский узел.** Неподвижное прикрепление материальной точки в плоскости требует как минимум двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой.

Точка в плоскости имеет две степени свободы.

Каждый стержень представляет собой связь, уничтожающую одну степень свободы.

Точка A (рис. 13, *а*), прикрепленная стержнями AB и AC , оси которых составляют угол α , будет неподвижной в том смысле, что сила P , лежащая в плоскости ABC , может вызвать лишь малые перемещения точки A за счет деформации прикрепляющих стержней.

Усилия в стержнях AB и AC находятся по правилам статики:

– составление **двух уравнений равновесия** точки A под действием данной силы P и двух неизвестных усилий N_A и N_{AC} в прикрепляющих стержнях;

– графически, путем **построения силового треугольника** (рис. 13, *б*) или параллелограмма сил.

Зная усилия в стержнях, можно подобрать их сечения так, чтобы напряжения и упругие деформации стержней находились в допустимых пределах.

Из силового треугольника рис. 13, *б* видно, что величины усилий в стержнях зависят не только от силы P , но и от угла α между стержнями. Изменяя угол α ,

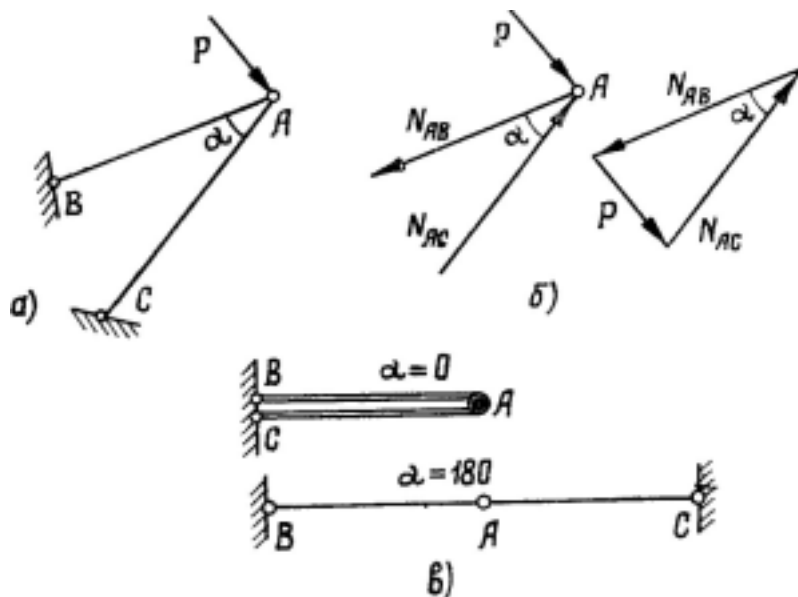


Рис. 13

можно убедиться, что при очень острых (близкий к нулю) и очень тупых углах (близких к 180°) усилия в стержнях будут намного больше силы P .

Для обеспечения прочности и жесткости необходимо ставить стержни с большой площадью поперечного сечения, имеющие большой вес. В связи с этим в реальных конструкциях избегают углов, близких к 0 или к 180° .

При $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$ оси стержней лежат на одной прямой (рис. 13, в), усилия в стержнях теоретически стремятся к бесконечности.

Прикрепление узла оказывается «мгновенно» подвижным (мгновенно изменяемым).

8. Пространственный узел. Плоский узел может воспринимать только силы, лежащие в его плоскости. Произвольно направленные силы можно прикладывать только к узлам, неподвижно закрепленным в пространстве.

Материальная точка в пространстве имеет три степени свободы, и для ее закрепления необходимы три стержня, не лежащие в одной плоскости (три связи, аннулирующие все степени свободы).

На рис. 14 показан пример пространственного узла, к которому приложена произвольно направленная сила P .

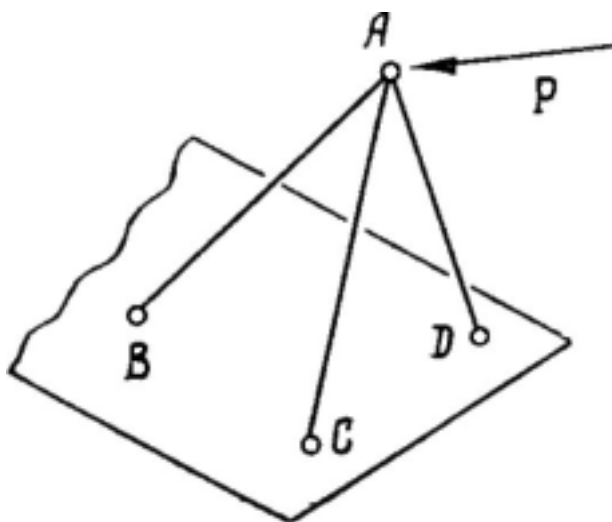


Рис. 14

Как и для плоского узла углы между стержнями AB , AC и AD не должны быть близки к 0 или к 180° . Если все три стержня лежат в одной плоскости, то мы имеем **плоский статически неопределимый узел**.

В плоскости имеется один лишний стержень, и усилия в стержнях не могут быть найдены из условий равновесия.

В направлении, перпендикулярном плоскости, узел является изменяемым и не может воспринимать никакой нагрузки.

Усилия в стержнях пространственного узла находятся из трех уравнений равновесия точки A с учетом действия внешней силы и неизвестных реакций стержней.

Составив уравнения проекций всех сил, действующих на узел, на три взаимно перпендикулярные оси, получаем **систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными усилиями в прикрепляющих стержнях**.

Графический метод нахождения усилий сводится к последовательному разложению силы P на **составляющую P_1** , действующую в плоскости каких-либо двух стержней, и **на усилие в третьем стержне**.

Составляющая P_1 раскладывается по направлениям остальных двух стержней.

Пример:

Сила P , действующая на узел A (рис. 15, а), может быть разложена на P_1 и N_{AD} (рис. 15, б), а сила P_1 , лежащая в плоскости ABC и направленная вдоль линии AE , раскладывается на составляющие N_{AB} и N_{AC} (рис. 15, в). Расчет сводится к двукратному построению силового треугольника (либо параллелограмма сил).

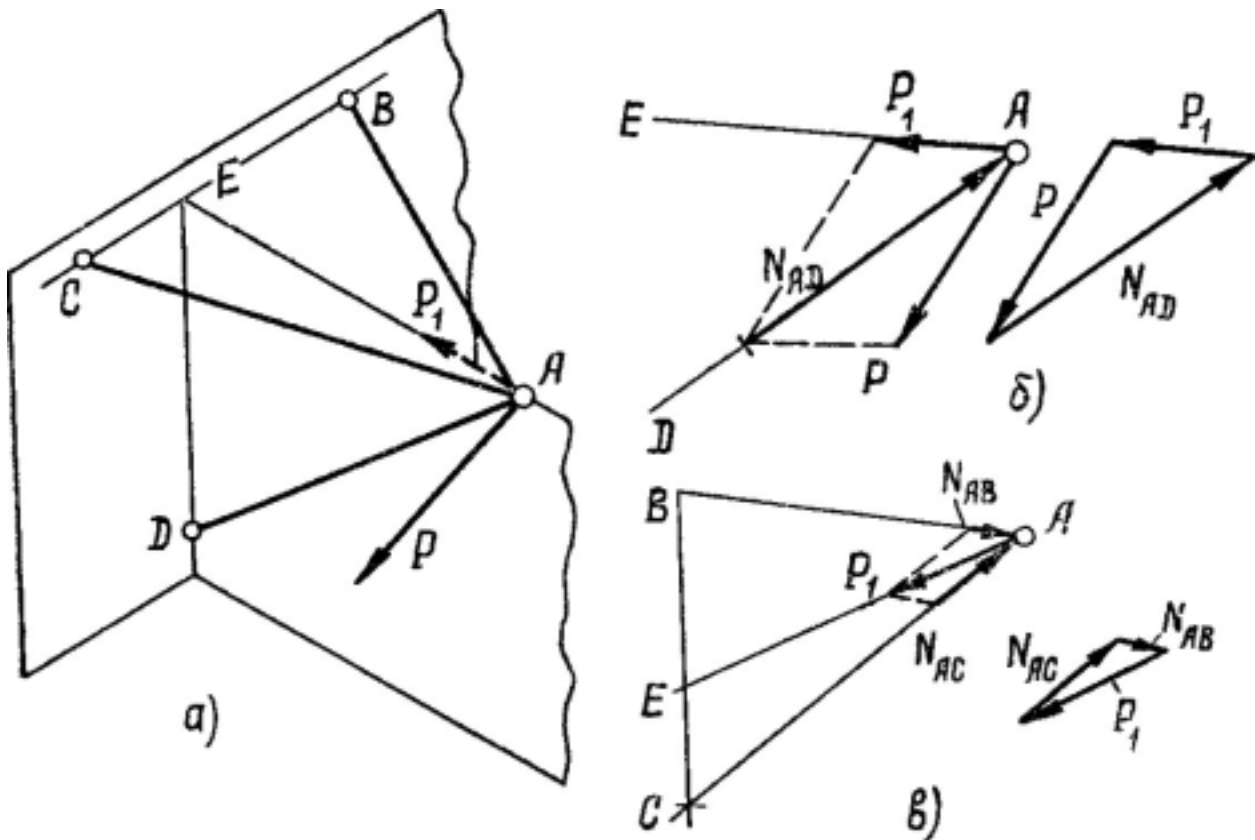


Рис. 15

3. ПРИКРЕПЛЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

9. Для неподвижного прикрепления плоского твердого тела (диска) в его плоскости достаточно трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 16, а).

Если же стержни расположить неправильно, так, что их оси пересекутся в некоторой точке O (рис. 16, б), то они не будут в состоянии аннулировать три степени свободы диска в плоскости (возможен поворот диска вокруг точки O на малый угол).

Прикрепление по схеме рис. 16, б недопустимо.

Параллельность стержней можно рассматривать как предельный случай пересечения, когда точка пересечения стержней удаляется в бесконечность. Прикрепление диска тремя параллельными стержнями также является мгновенно изменяемым прикреплением (рис. 16, в).

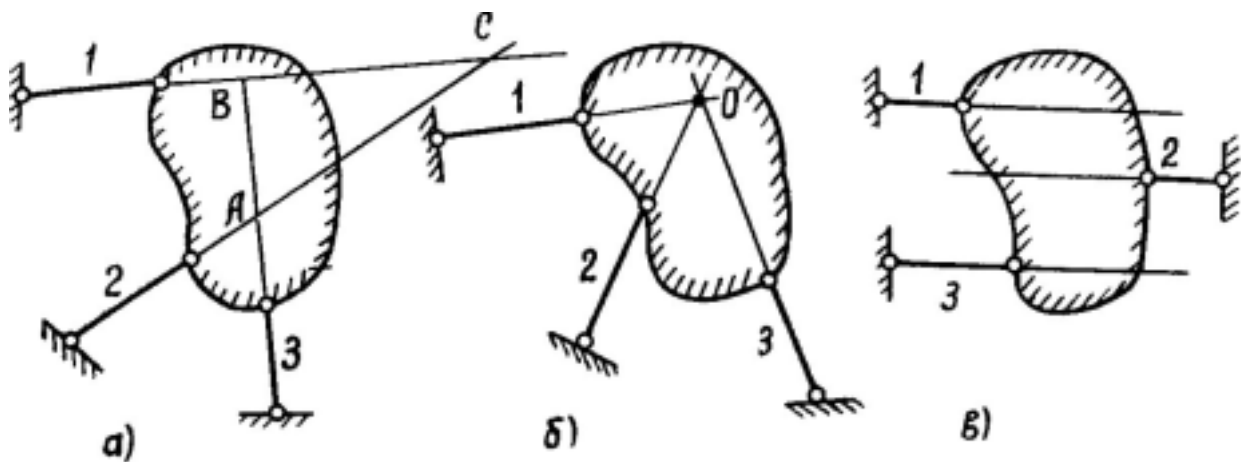


Рис. 16

Усилия в стержнях определяются из уравнений равновесия диска под действием заданной нагрузки P и искомых реакций стержней.

Чтобы избежать решения системы трех уравнений с тремя неизвестными, составляем уравнения моментов относительно точек пересечения каждой пары стержней.

Рассечем прикрепляющие стержни и заменим их действие на диск неизвестными силами N_1, N_2, N_3 (рис. 17, а).

Усилие N_1 находится из уравнения моментов относительно точки A , где пересекаются стержни 2 и 3:

$$N_1 r_1 - P r_p = 0$$

r_p — плечо силы P ;

r_1 — плечо усилия N_1 .

Аналогично усилия в стержнях 2 и 3 находятся из уравнений моментов относительно точек B и C . В том случае, когда одна из точек попарного пересечения прикрепляющих стержней оказывается за пределами чертежа, т.е. когда пара стержней параллельна или почти параллельна, соответствующее уравнение моментов заменяется уравнением проекций сил на ось x или y .

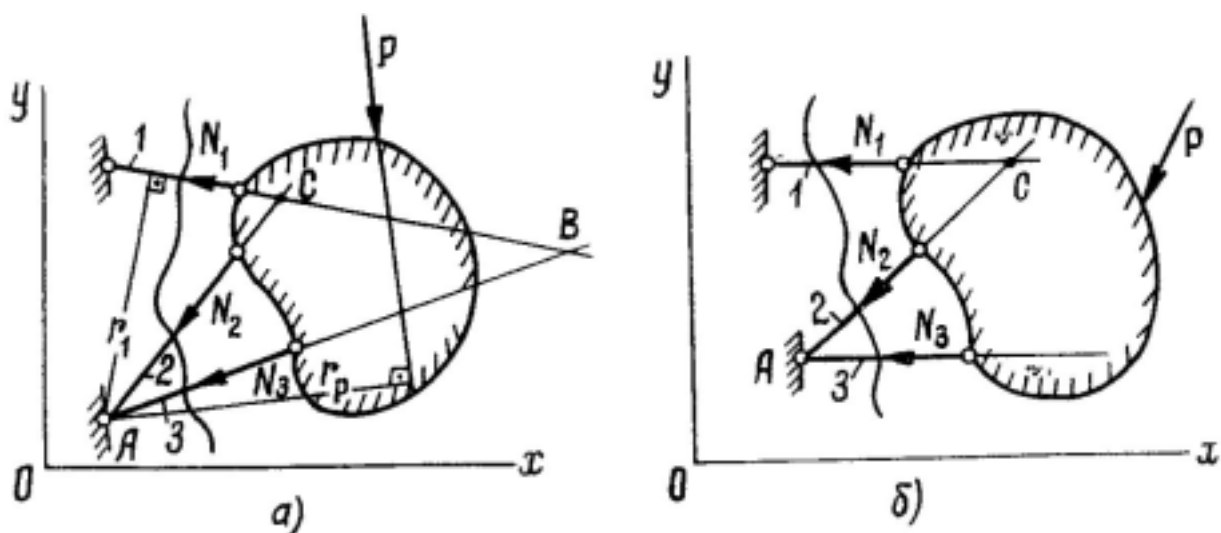


Рис. 17

Если в результате расчета значения усилий в стержнях оказываются бесконечно большими или неопределенными, то это свидетельствует об изменчивости прикрепления.

10. Твердое тело в пространстве обладает шестью степенями свободы: тремя степенями свободы поступательного перемещения вдоль трех осей, не лежащих в одной плоскости, и тремя степенями свободы вращения относительно этих осей.

Для неподвижного прикрепления твердого тела необходимо и достаточно наличие шести стержней, оси которых невозможно пересечь одной прямой (параллельность рассматривается как пересечение в бесконечно удаленной точке).

Если существует прямая, пересекающая все шесть стержней, то она является **мгновенной осью вращения тела** и прикрепление оказывается мгновенно изменяемым.

Реакции стержней, проходящих через мгновенную ось, не могут препятствовать вращению тела вокруг этой оси на малый угол. Возможно бесчисленное количество вариантов размещения прикрепляющих стержней.

Два частных случая неизменяемого прикрепления, удобные для практического использования.

а) Три стержня лежат в одной плоскости S , а три стержня образуют пространственный узел A (фиг. 18, а), не лежащий в плоскости S .

В этом случае нельзя провести прямую, пересекающую все шесть стержней. Если предположить, что такая прямая лежит в плоскости S и пересекает стержни 1, 2, 3, то она не может пройти через точку A и, следовательно, пересечь стержни 4, 5, 6. Наоборот, если прямая пересекает стержни 4, 5, 6, т.е. проходит через точку A , то она не может лежать в плоскости S и пересечь все остальные стержни.

Рассмотренное прикрепление сводится к неподвижному закреплению в плоскости S диска, принадлежащего твердому телу (заштрихованного на рис. 18, а), и к закреплению точки A этого же тела.

б) Стержни пересекаются попарно и точки их пересечения не лежат на одной прямой (рис. 18, б).

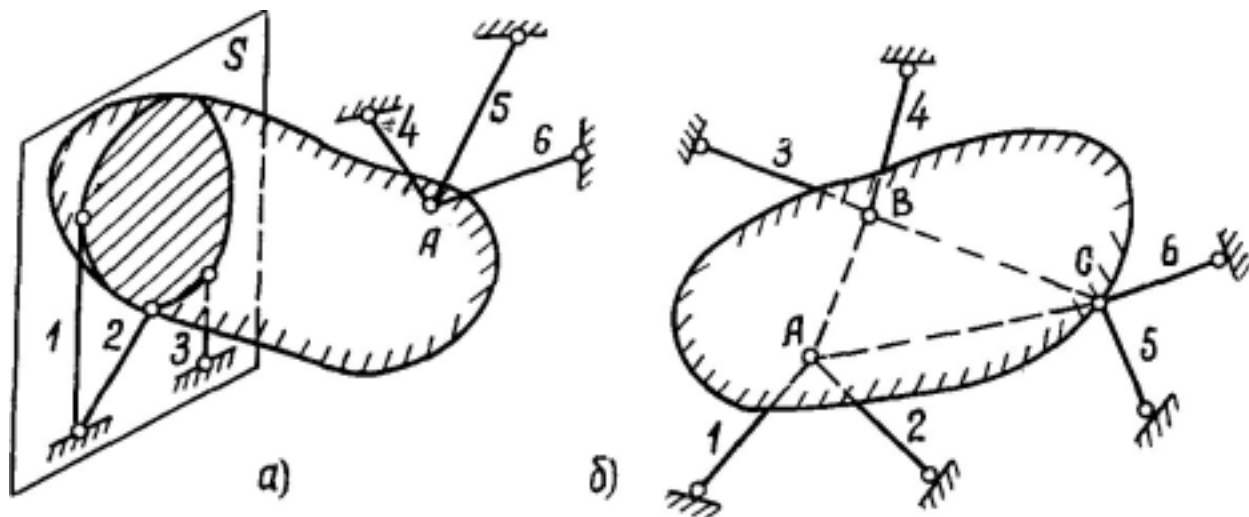


Рис. 18

В этом случае также не существует прямой, пересекающей одновременно все шесть стержней, и прикрепление будет неизменяемым.

Можно брать пары стержней не пересекающиеся, а параллельные, лишь бы не оказалось четырех параллельных стержней.

При соединении деталей и агрегатов авиационного двигателя и в случае прикрепления двигателя к корпусу ЛА необходимо учитывать неизбежность температурного расширения сильно нагретых деталей двигателя, которое при неправильном закреплении может привести к появлению нежелательных температурных напряжений.

Тепловое расширение происходит одновременно в **радиальном** (расширение поперечного сечения) и **осевом** (продольное расширение) направлениях.

Прикрепление нагреваемых элементов должно быть **статически определенным**, чтобы не препятствовать их свободному расширению.

Пример:

Неизменяемое прикрепление двигателя к самолету (рис. 18, б)

Узлы *A* и *B* не препятствуют расширению тела в радиальном направлении, так как стержни *1*, *2* и *3*, *4* могут попарно поворачиваться относительно осей, проходящих через шарниры, прикрепляющие их к фюзеляжу самолета. Продольное расширение также не вызовет появления температурных напряжений, а приведет к повороту прикрепляющих стержней *5*, *6* и к продольному смещению узла *C*.

11. Примеры ошибочного расположения стержней, не обеспечивающего неизменяемость прикрепления

а) **Недопустимо расположение четырех стержней в одной плоскости *S*** (рис. 19, а). В этом случае, как бы ни были расположены остальные два стержня *5* и *6*, всегда найдется прямая *AB*, пересекающая все шесть стержней и являющаяся мгновенной осью вращения тела. Эта прямая проходит через точки *A* и *B* пересечения осей стержней *5* и *6* с плоскостью *S*. Если стержни *5* и *6* параллельны плоскости *S*, то мгновенной осью вращения тела является любая прямая, лежащая в плоскости *S* и параллельная стержням *5* и *6*.

б) **Четыре стержня пересекаются в одной точке A , остальные два расположены произвольно** (фиг 19, б).

Через точку A и каждый из стержней 5 и 6 можно провести две плоскости, которые пересекутся по некоторой прямой, проходящей через точку A . Эта прямая пересечет все шесть стержней и будет мгновенной осью вращения.

в) **Стержни лежат в двух плоскостях S и Q** (фиг 19, в).

Линия пересечения плоскостей S и Q является осью, пересекающей все шесть стержней. При параллельности плоскостей S и Q мгновенная ось вращения расположена в бесконечности. Тело испытывает мгновенное поступательное перемещение.

г) **Четыре стержня параллельны, остальные два расположены произвольно** (рис. 19, г)

Через каждый из двух последних стержней можно провести плоскости, параллельные остальным четырем стержням. Эти плоскости пересекутся по прямой, параллельной четырем стержням и пересекающей два непараллельных стержня. Если плоскости окажутся параллельными друг другу, то мгновенная ось вращения удалится в бесконечность и вместо мгновенного поворота тело будет испытывать мгновенное поступательное перемещение.

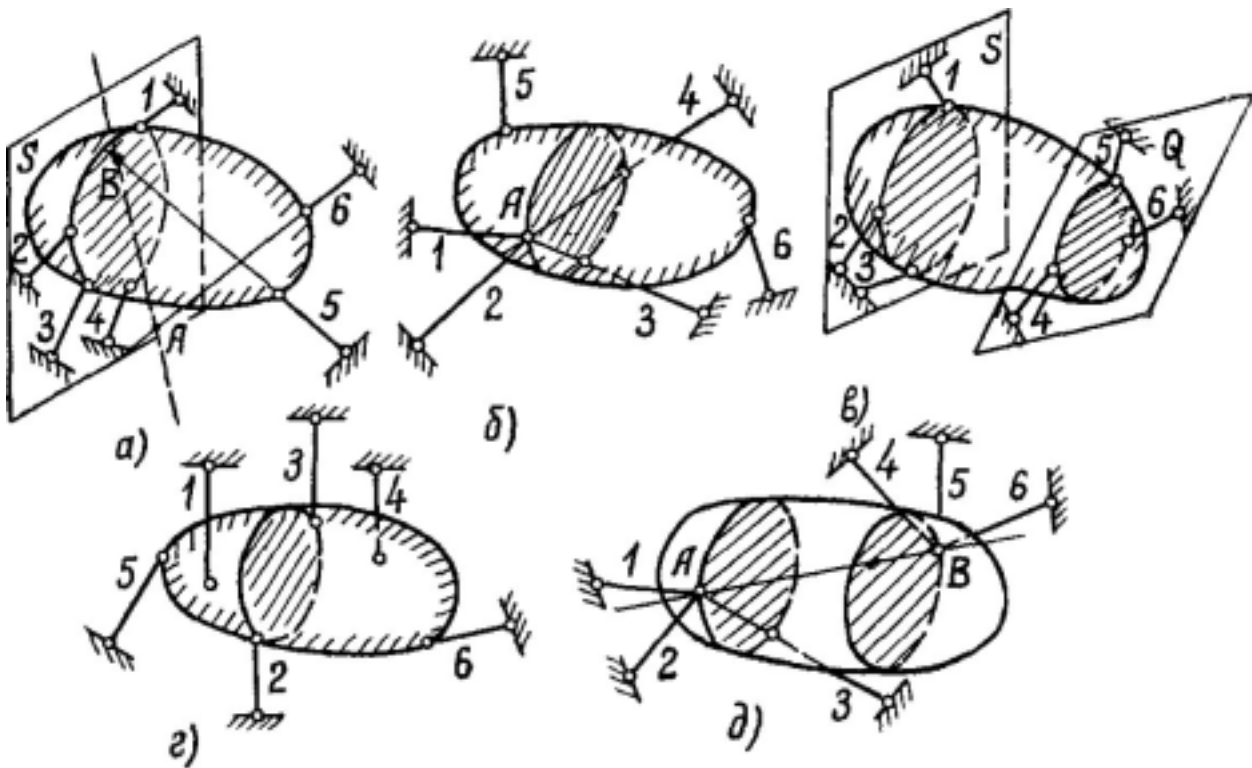


Рис. 19

д) Прикрепляющие стержни пересекаются по три в двух точках: A и B (рис. 19, д).

Прямая AB пересекает все шесть стержней и является мгновенной осью вращения.

Мгновенно изменяемая конструкция не является механизмом в полном смысле этого слова, так как малый поворот тела приводит к изменению направлений стержней, после чего дальнейшее перемещение становится невозможным. Для изменяемого прикрепления характерны значительные (перемещения и большие усилия в стержнях, вызываемые ничтожной нагрузкой).

12. Для вычисления усилий в шести стержнях, прикрепляющих твердое тело, используются шесть условий равновесия тела под действием заданной нагрузки и неизвестных реакций стержней.

Для упрощения системы уравнений оси выбирают так, чтобы они пересекали пять стержней из шести. Составив сумму моментов сил относительно такой оси, получаем значение усилия в шестом стержне.

Ось, пересекающая пять из шести стержней, всегда существует, но практически найти ее непросто. Поэтому обычно сначала вычисляют усилия в нескольких (в трех или четырех) стержнях, используя уравнения моментов относительно осей, которые найти нетрудно, а усилия в остальных стержнях находят из уравнений проекций всех сил на три взаимно перпендикулярные оси.

Пример:

В случае прикрепления (рис. 18, а), усилие в стержне 3 находится из суммы моментов сил относительно оси, проходящей через точку A и точку пересечения стержней 1 и 2. Ось для вычисления усилия в стержне 1 проходит через точку A и точку пересечения стержней 2 и 3. Усилие в стержне 2 определяется из уравнения моментов сил относительно оси, проходящей через точку A параллельно стержням 1 и 3. Зная силы N_1, N_2, N_3 , вычисляем усилия в остальных трех стержнях, используя три уравнения проекций на оси x, y, z .

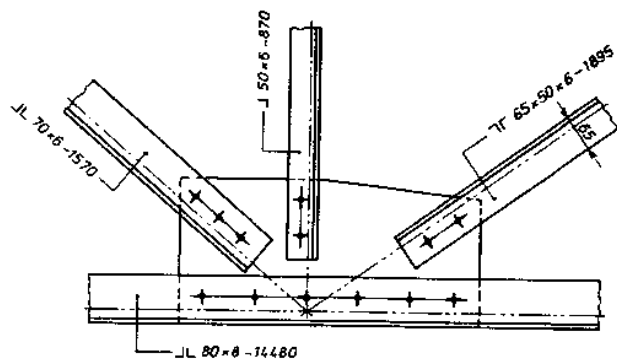
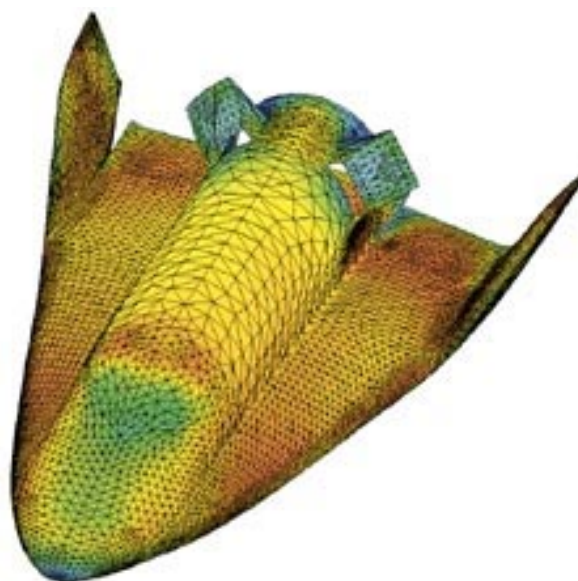


fig. 14



4. СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

В строительной механике стержневых систем обычно рассматриваются только **системы, перемещения и деформации которых являются однородными функциями внешних сил.**

Задача расчета стержневых систем:

при заданных: **геометрической схеме и внешних нагрузках:**

- 1 — определить *внутренние силовые факторы;*
- 2 — и *перемещений элементов системы.*

Стержневая система, относительные перемещения частей которой невозможны без деформации называется геометрически неизменяемой.

Стержневые системы делятся на *фермы* и *рамы* в зависимости от типа связей в месте соединения отдельных стержней.

Фермой называется геометрически неизменяемая система, в которой стержни в узлах между собой соединяются шарнирно. Внешние силы приложены только в узлах, вследствие чего стержни в ферме работают на растяжение и сжатие.

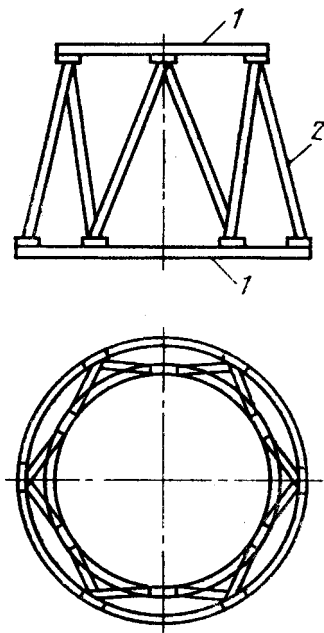
Геометрически неизменяемая стержневая система, в которой элементы в узлах соединены жестко, вследствие чего стержни работают на изгиб или на кручение (сдвиг), называется **рамой**. Силы в раме могут прикладываться в любом сечении.

Фермы состоят из стержней и узлов, соединяющих между собой стержни.

На практике идеальных ферм почти нет, т.к. стержни в ферменных конструкциях соединены между собой не шарнирно (сварка или клейка). Для простоты — считаем шарнирно.

Фермы нагружаются внешними усилиями в узлах.

Ферма может быть плоской и пространственной.



Конструктивная схема переходного отсека типа фермы:

- 1 — стыковой шпангоут;
- 2 — стержень (труба) фермы

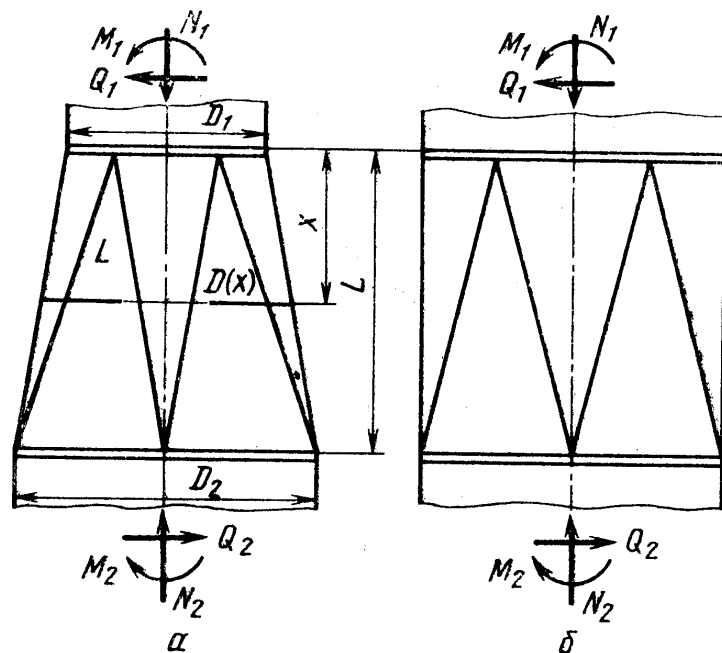


Схема нагружения переходных ферм конической (а) и цилиндрической (б) формы

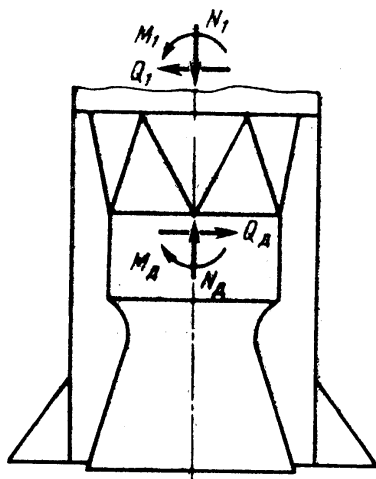


Схема нагружения ферменного крепления двигателя

Центральный блок РН "Протон"



Ферма



Проставка

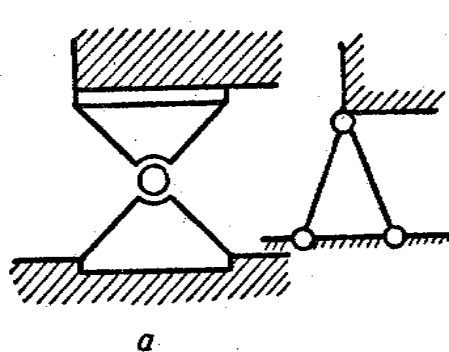


Переходный отсек состоит из фермы и проставки. Ферма соединяет первую ступень со второй и обеспечивает свободный выход газов при запуске двигателей второй ступени. Ферма образована стальным шпангоутом швеллерного сечения и крестовинами, закрепленными на нем болтами. Крестовины двутаврового сечения, отштампованы из алюминиевого сплава В95. Шпангоут и крестовины имеют теплозащитное покрытие. Проставка клепаной конструкции, включает два шпангоута и обшивку, выполненные из сплава В95. Верхний шпангоут проставки служит опорной поверхностью при транспортировке центрального блока.

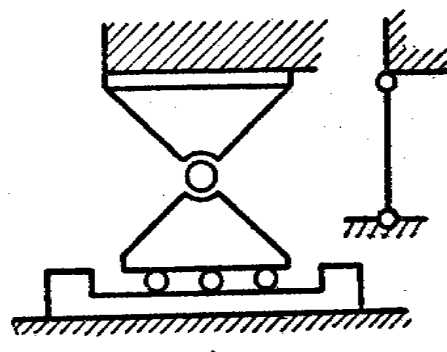
4.1. Прикрепление ферм. Типы опор

Опоры фермы могут быть двух типов:

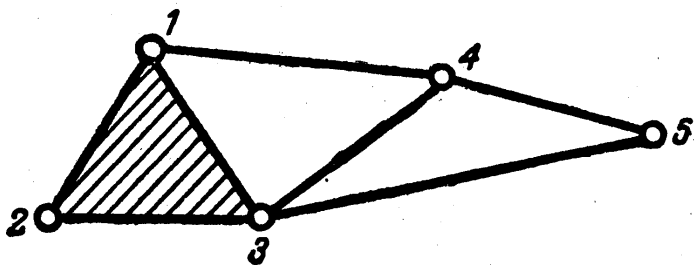
- а) — шарнирная неподвижная (возникает нормальная и касательная реакции);
- б) — подвижный шарнир (возникает только нормальная реакция) (см. рисунок).



а



б

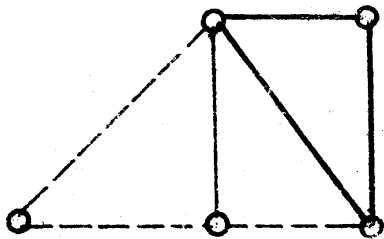


Элементарной геометрически неизменяемой системой является **треугольник**. Для присоединения каждого нового узла нужны два стержня, не расположенные на одной прямой.

Для присоединения узла 4 к треугольнику 1-2-3 достаточно стержней 1-4 и 3-4; для присоединения узла 5 достаточно стержней 4-5 и 3-5 и т.д.

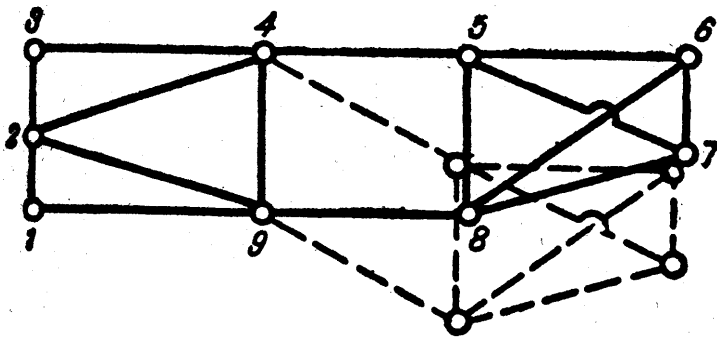
Для образования фермы, имеющей k узлов к основному треугольнику присоединяются $n - 3$ узла, каждый двумя стержнями. Еще три стержня образуют основной треугольник. Такие системы называются **простейшими**.

Между количеством узлов n и количеством стержней m существует зависимость:



$$m = 2(n - 3) + 3$$

$$\text{или } m = 2n - 3.$$



Соединение узла с другим стержнем приведет к перемещению узла только за счет растяжения стержня. Система из n свободных точек на плоскости будет иметь $2n$ степеней свободы. Каждый стержень, соединяющий точки друг с другом (S) или крепящий систему к основанию (S_0), уменьшает число степеней свободы на 1.

Общее число степеней свободы плоской стержневой системы будет равно

$$W = 2n - S - S_0$$

(в число n не включаются узлы на концах опор).

Это необходимое, но недостаточное условие обеспечения геометрической неизменяемости системы.

Система, которая может менять свою форму без удлинения стержней, называется **геометрически изменяемой** $W \geq 1$.

Для **геометрически неизменяемой** системы $W \leq 0$.

Если $W = 0$ — она **статически определимая**. (Для определения внутренних сил в каждом стержне достаточно уравнений равновесия.) Т.о. для статически определимых геометрически неизменяемых плоских систем $2n = S + S_0$.

Сложные системы образуются из простейших путем замены в них стержней, либо соединением между собой двух или нескольких простейших систем (с помощью стрех соединительных стержней, которые не должны пересекаться в одной точке или быть параллельными).

Минимальное число стержней геометрически неизменяемой системы, не имеющей креплений к основанию, равно $S = 2n - 3$. Если $S < 2n - 3$, система будет геометрически изменяемой.

Статически неопределимой системе соответствует условие $S > 2n - 3$.

Для пространственной системы стержней число степеней свободы:

$$W = 3n - S - S_0$$

Минимальное число стержней, требуемое для закрепления системы, равно шести ($S_0 = 6$).
Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости без учета опорных связей при $W = 0$ имеет вид

$$S = 3n - 6.$$

Если $S > 3n - 6$, то ферма статически неопределима.

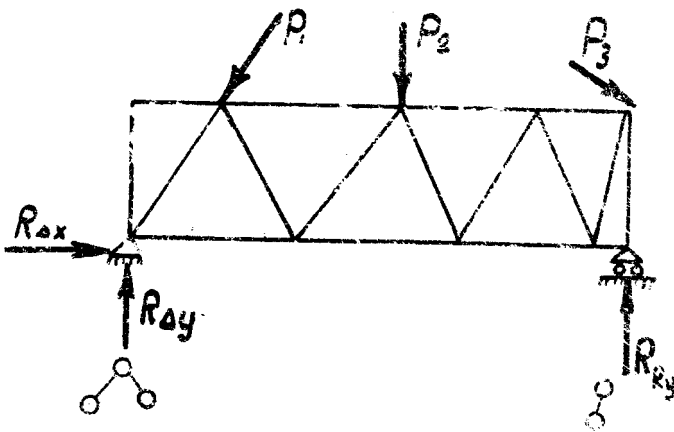
При $S < 3n - 6$ связей не хватает для того, чтобы система была геометрически неизменяемой.

Усилия в этих стержнях (реакции) могут быть определены при помощи уравнений равновесия.

Для этого приравняем к нулю сумму всех сил, действующих на ферму, включая и реакции

x_i — проекция действующих сил на ось X ;

y_i — проекция действующих сил на ось Y .



$$\sum (x_i + R_{xi}) = 0$$

$$\sum (y_i + R_{yi}) = 0$$

$$\sum (M_{Ri} + M_{Pi}) = 0$$

Реакции в точках опоры фермы определяются точно также, как если бы вместо фермы была балка.

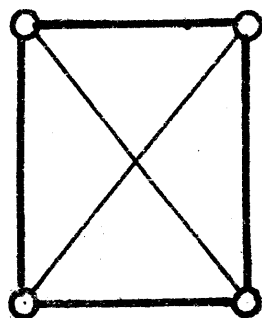
Статически определимая ферма — та, в которой нельзя отбросить ни одного стержня без того, чтобы она не превратилась в механизм (т.е. отдельные части фермы смогут перемещаться друг относительно друга).

Статически неопределимая ферма — та,

которая после удаления отдельных стержней не превращается в механизм.

Пример: рамка с двумя раскосами.

Такие фермы широко применяются в конструкциях. Более живучи, т.к. разрушение отдельных стержней не влечет за собой разрушения фермы.



Крепление звездообразного двигателя — 8 стержней, хотя достаточно 6-ти (3 не параллельны друг другу).

Расчет статически неопределимых ферм сложен.

В статически определимых фермах имеется определенная зависимость между числом стержней и числом узлов.

Расчет ферм заключается в определении сил, действующих во всех стержнях.

Стержни фермы работают только на растяжение—сжатие, т.е. нагружаются со стороны узлов только осевыми силами. Поперечными силами стержни фермы со стороны узлов нагружаться не могут.

$S = 11; n = 7; 11 = 2 \times 7 - 3$
 (система статически определима)

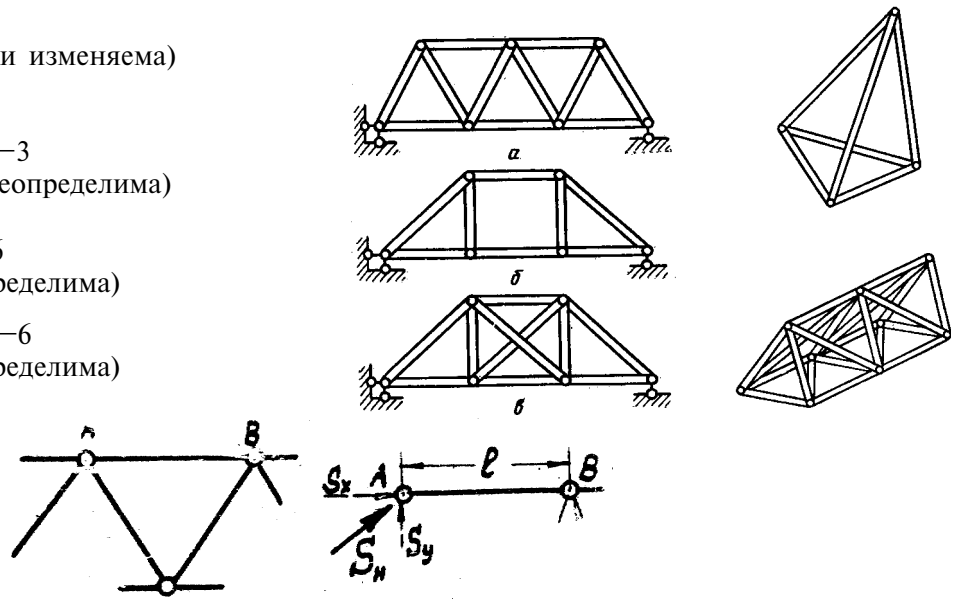
$S = 8; n = 6; 8 < 2 \times 6 - 3$
 (система геометрически изменяема)

$S = 10; n = 6; 10 > 2 \times 6 - 3$
 (система статически неопределима)

$S = 6; n = 4; 6 = 3 \times 4 - 6$
 (ферма статически определима)

$S = 12; n = 6; 12 = 3 \times 6 - 6$
 (ферма статически определима)

Примеры выполнения плоских и пространственных ферм



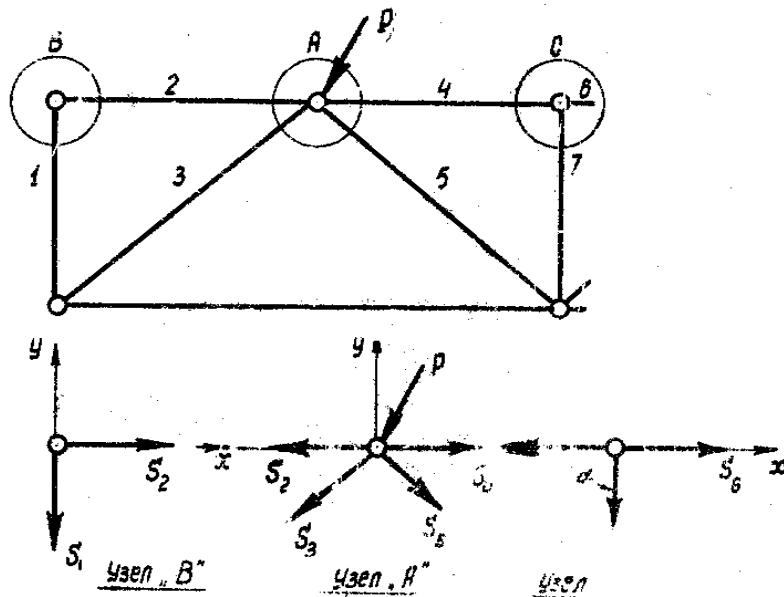
Рассмотрим произвольный стержень АВ.
 Предположим, что на данный стержень со стороны узла А действует не только осевая сила S_x , но и поперечная S_y . Тогда для равновесия стержня в узле В должны быть приложены силы: $S_x^B = -S_x; S_y^B = -S_y$ и момент $M_B = S_y \cdot l$. Но т.к. узел В — шарнир, то момент в нем возникнуть не может, а, следовательно, на узел А не может действовать сила S_y .

4.2. Определение усилий в стержнях фермы

Рассмотрим равновесие узлов фермы. Выделим какой-нибудь узел. К нему приложены силы со стороны стержней — S.

Стержень сжат — силы к узлу, растянут — от узла.

Т.к. узел находится в равновесии, то сумма всех сил, действующих на узел, включая и внешние нагрузки, равна нулю или:



$$\sum X = \sum (P_x + S_{ix}) = 0$$

$$\sum Y = \sum (P_y + S_{iy}) = 0$$

Отсюда следующие выводы:

1. Если имеется ненагруженный узел фермы, в котором сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.

$$\begin{aligned} \sum X - S_2 &= 0 \\ \text{Узел «В»} \quad \sum Y - S_1 &= 0 \end{aligned}$$

2. Если имеется ненагруженный узел, в котором сходятся три стержня, из которых два лежат на одной прямой, а третий расположен к ним под углом, то усилие в третьем стержне равно нулю.

$$\text{Условие равновесия. Узел «С»} \quad \sum Y = S_7 \cdot \sin \alpha = 0$$

отсюда $S_7 = 0$.

Наиболее употребительными способами расчета ферм являются:

- способ вырезания узлов;
- способ сечения.

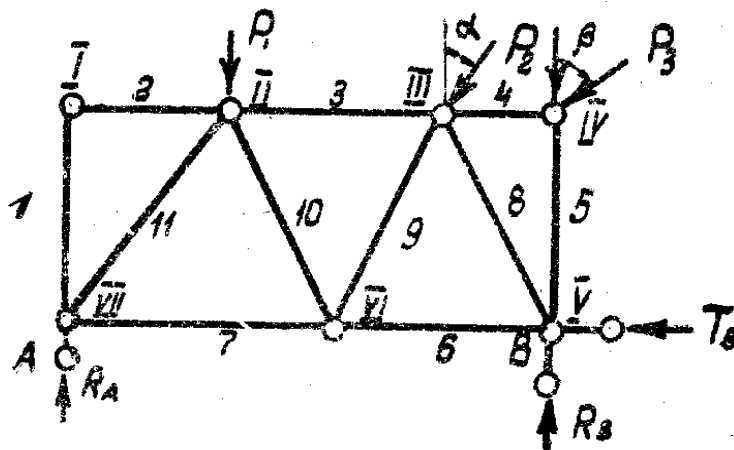
4.2.1. Способ вырезания узлов

Построен на том, что сумма всех сил, действующих на узел, равна нулю.

Порядок расчета.

Имеется ферма, размеры и внешние нагрузки известны.

1. Из условия равновесия фермы (сумма всех сил и моментов, действующих на ферму, равна нулю) определить значения реакций.



$$R_A + R_B + \sum P_y = 0;$$

$$T_B + \sum P_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \text{ — сумма моментов всех сил относительно любой точки (напр. } B) \text{ равна нулю.}$$

(Определение реакций производится также, как и для балки.)

2. Расчет начинаем с узла, в котором сходятся два стержня. (Выбираем узел I).

Из условия $\sum X = 0$ получим $S_2 = 0$; из условия $\sum Y = 0$ получим $S_1 = 0$.

3. Переходим к узлу, где сходятся не более двух стержней с неизвестной нагрузкой. (узел VII).

Из условия равновесия узла:

$$R_A = S_{11} \cdot \sin \alpha; \quad S_7 = S_1 \cdot \cos \alpha$$

Направления S_{11} и S_7 берем произвольно. При численном расчете получим знак «—» — выбрали неправильно.

4. Переходим к следующему узлу (узел II).

Из условий равновесия узла

$$S_{11} \cos \alpha - S_{10} \cdot \cos \beta - S_3 = 0,$$

$$S_{11} \sin \alpha + S_{10} \cdot \sin \beta - P = 0,$$

Зная S_{11} — находим значения сил

S_{10} и S_3 и т.д.

Очень часто требуется определить действующие силы не во всех стержнях фермы, а только в нескольких. Определение сил этим методом — громоздко.

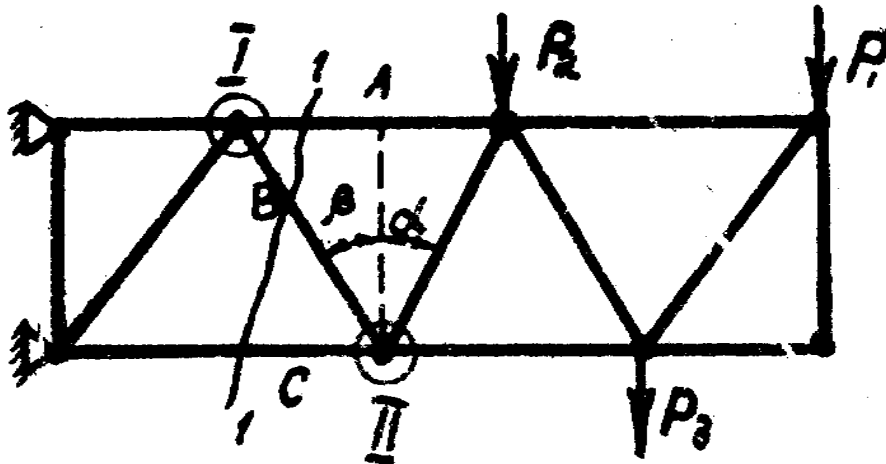
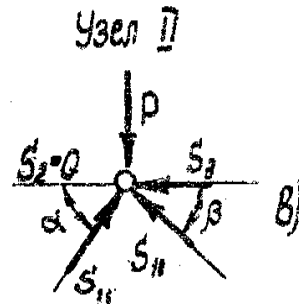
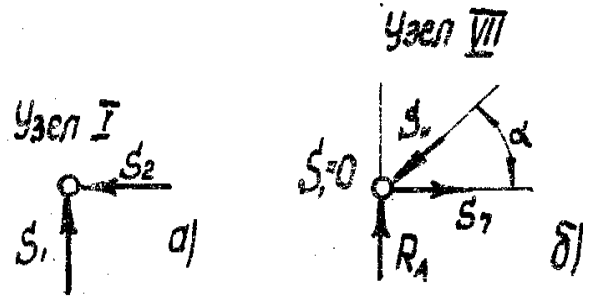
Лучше использовать **способ сечений**. Он хорош для ферм, работающих как балки.

4.2.2. Способ сечения

Найдем значения усилий в стержнях A , B , C .

Проведем сечение I—I, пересекающее три интересующих нас стержня.

Под действием внешних сил отсеченная часть балки стремится переместиться вниз и повернуться.



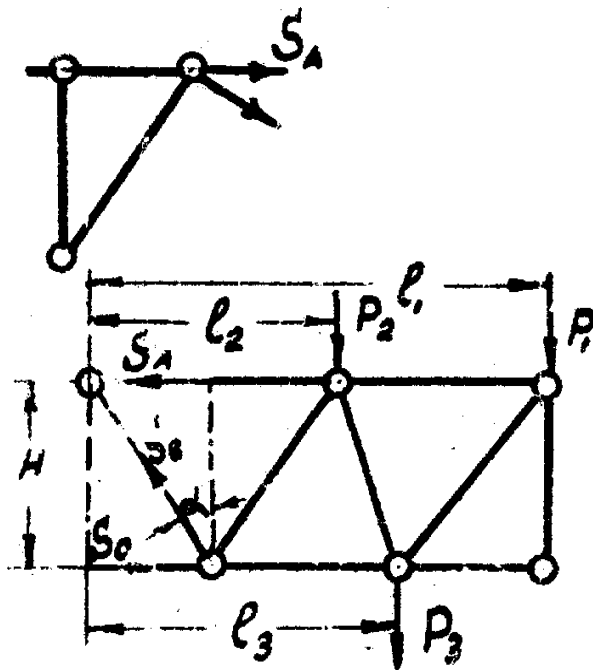
В сечении фермы как и в поперечном сечении балки должны возникнуть поперечная сила Q и изгибающий момент $M_{изг.}$, препятствующие перемещению правой части фермы. Q и $M_{изг.}$ можно найти, рассмотрев ферму, как изгибаемую балку.

Q — поперечная сила, может восприниматься только стержнем B — подкосом, т.к. ни усилия в стержне A , ни в стержне C не дают вертикальных составляющих.

Момент же может восприниматься только усилиями, возникающими в стержнях A и C — в поясах балки.

1. Определяем величины реакций (как для балки).

2. Рассмотрим отсеченную часть балки. На нее действуют внешние силы, а также внутренние силы: S_A , S_B , S_C рассеченных стержней. Под действием всех сил отсеченная часть должна находиться в равновесии.



Уравнения равновесия:

$$\sum Y = P_1 + P_2 + P_3 - S_B \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum X = S_A + S_B \cdot \sin \alpha - S_C = 0.$$

Сумму моментов удобнее брать относительно узла A .

$$\sum M_A = P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + P_3 \cdot l_3 = S_C \cdot H = 0.$$

Из этих трех уравнений определяем силы, действующие в стержнях.

В плоских фермах, работающих на изгиб, как балки, поперечная сила воспринимается раскосами и стойками, а изгибающий момент — растяжением или сжатием стержней поясов.

Пространственные фермы большей частью состоят из отдельных плоских ферм.

При расчете пространственных ферм необходимо помнить, что каждая ферма воспринимает только нагрузки, действующие в

плоскости фермы, т.к., в противном случае, в стержнях фермы должны были бы возникать усилия, перпендикулярные осям стержней. Если в пространственной ферме в каком-либо ненагруженном внешней силой узле все стержни лежат в одной плоскости и только один стержень не расположен в этой плоскости, то действующая в нем сила равна нулю.

5. ОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКИХ ФЕРМ И ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК

13. Неизменяемые плоские конструкции, как уже отмечалось, способные воспринимать сосредоточенные силы, лежащие в их плоскости, **могут быть созданы путем соединения стержней и дисков.**

Последовательно присоединяя узлы двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, можно получить жесткую, геометрически неизменяемую конструкцию, способную воспринимать силы, приложенные в узлах, — **плоскую ферму.**

Узлы фермы перенумерованы в порядке их последовательного наращивания от неподвижных точек A и B (рис. 20). Т.к. *каждый узел прикрепляется двумя стержнями*, то общее количество стержней s с плоской фермы, не считая стержня AB и узлов A и B , принадлежащих основанию, равно удвоенному количеству n узлов фермы:

$$s = 2n,$$

где s — число стержней фермы;

n — число узлов фермы.

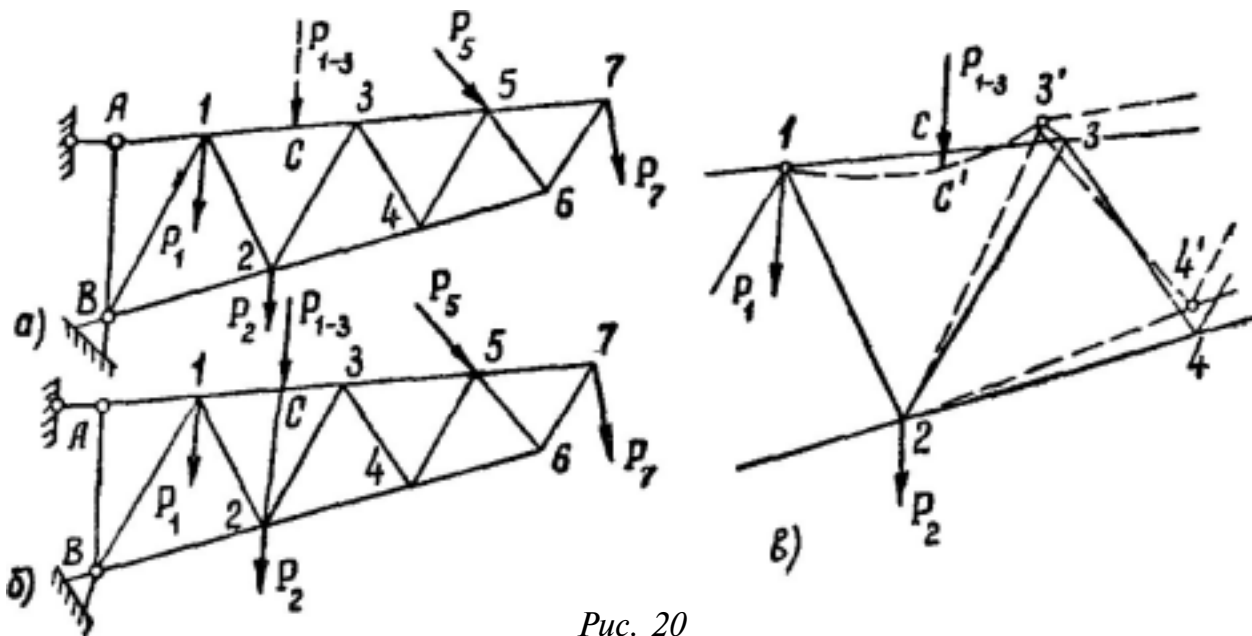


Рис. 20

Нагрузки, приложенные в узлах и лежащие в плоскости фермы, вызывают *растяжение* или *сжатие стержней* (на рис. 20, a часть узлов не нагружена).

Нагрузки, действующие на стержни фермы в промежутке между узлами (например, показанная пунктиром на рис. 20, a сила P_{1-3}) нежелательны, а подчас и недопустимы (они вызывают изгиб стержня, не предназначенного для работы на изгиб).

Внеузловые нагрузки небольшой величины не могут вызвать разрушения фермы, но значительно снижают ее жесткость, т.к. изгиб стержня сопровождается большими взаимными перемещениями частей фермы, соединяемых этим стержнем.

На рис. 20, a показаны перемещения, вызванные изгибом стержня $1-3$. Это явление можно устранить, создав **дополнительный** узел C с помощью добавочного стержня (стойки) $C-2$ (рис. 20, b), передающего силу P_{1-3} в узел 2 и тем самым предотвращающего изгиб стержня $1-3$.

Стойка $C-2$ нагружается только силой P . Остальные нагрузки фермы никакого влияния на этот стержень не оказывают (даже сила P , приложенная в нижнем конце стойки).

Если сила P отсутствует, то усилие в дополнительном стержне $C-2$ равно нулю.

Плоская ферма должна конструироваться таким образом, чтобы все точки приложения сосредоточенных сил были бы связаны стержнями с основными узлами фермы.

Определение усилий в простейших плоских фермах производится путем последовательного разложения узловой нагрузки на направления стержней, прикрепляющих этот узел к остальной части фермы.

Расчет начинается с узла, прикрепленного двумя стержнями, который в процессе образования фермы является последним (узел 7 на рис. 20, *а*). Для последующих узлов нагрузкой служит не только внешняя сила, но и ранее найденные усилия в стержнях, примыкающих к данному узлу. Например, для узла 5 (рис. 20, *а*) нагрузкой является равнодействующая силы P и усилий в стержнях 5-6 и 5-7, которые должны быть определены заранее из рассмотрения равновесия узлов 7 и 6.

14. Элементарной ячейкой плоской фермы является стержневой треугольник ABC (рис. 21, *а*). Если этот треугольник зашить тонкой пластинкой, которая на рис. 21, *б* показана штриховкой, то прочностная надежность и несущая способность (величина нагрузки, которую в состоянии выдержать конструкция не разрушаясь) практически не изменятся.

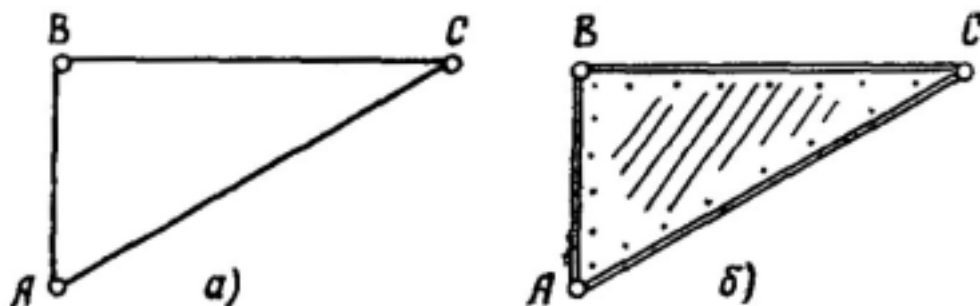


Рис. 21

Жесткость стержневого треугольника в его плоскости (при узловых нагрузках) намного больше жесткости тонкой пластинки. На долю пластинки придется лишь незначительная часть нагрузки. Пластика не входит в силовую схему конструкции и если ставится, то не с целью увеличения прочности, а из иных конструктивных соображений, например, для создания сплошной переборки, отделяющей один отсек от другого.

Если элемент представляет собой четырехугольник, например, прямоугольник (рис. 22, *а*) или трапецию (рис. 22, *б*), то при чисто стержневой конструкции его можно рассматривать как плоскую ферму, составленную из двух треугольных полей ABC и ACD (или соответственно EFH и FGH), а следовательно, **геометрически неизменяемую**.

Диагональный раскос AC (либо FH) препятствует изменению формы четырехзвенника, образованного наружными стержнями.

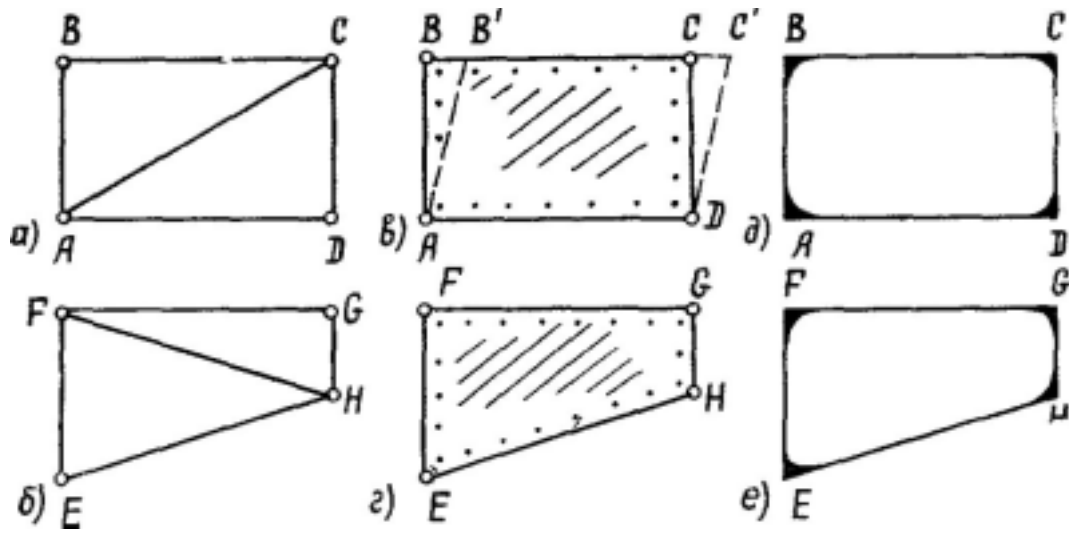


Рис. 22

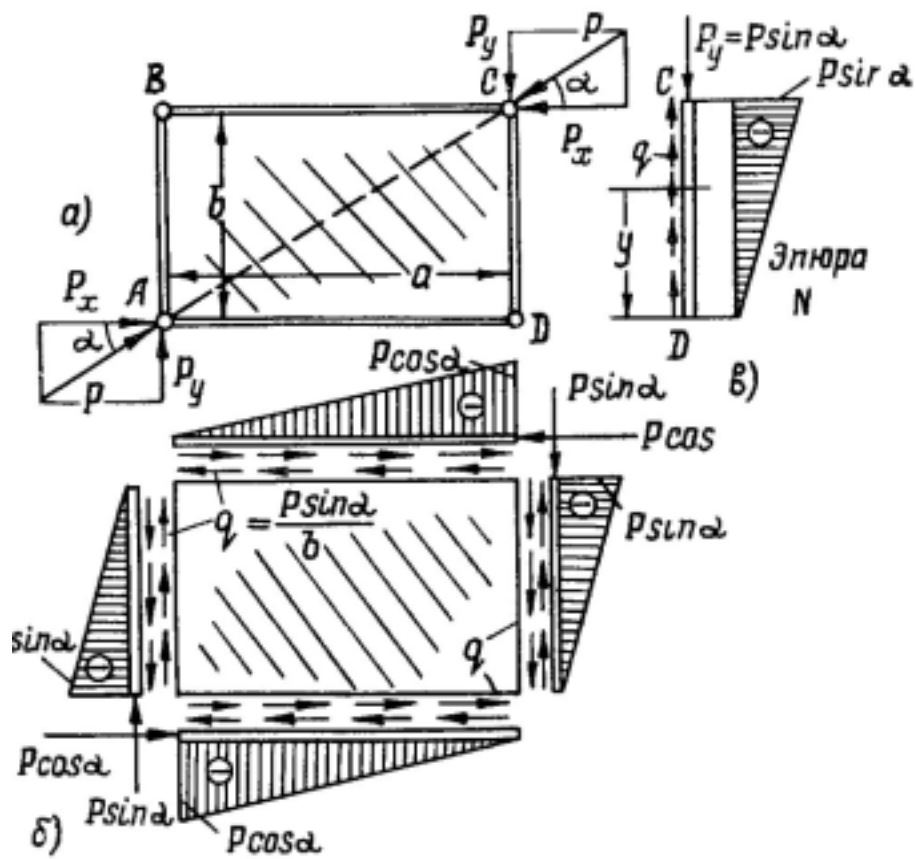


Рис. 23

Функции диагонального раскоса может выполнять тонкая пластинка, соединенная со всеми четырьмя наружными стержнями (рис. 22, *в* и *а*)

Четырехзвенник $ABCD$, стремясь под действием внешних сил превратиться в параллелограмм $ABCD$, нагружает пластинку сдвигающими усилиями, действующими вдоль ее краев.

Рассмотрим прямоугольную тонкую пластинку, окантованную стержневым четырехзвенником и нагруженную по диагонали равными и противоположно направленными силами P (рис. 23, *а*). Каждый стержень оказывается нагруженным составляющими силы P , равными $P \cos \alpha$ и $P \sin \alpha$. Эти силы уравниваются касательными усилиями q со стороны пластинки. Практически эти усилия можно считать постоянными на протяжении всего стержня.

Отделим стержни от пластинки сквозными сечениями, заменим влияние отброшенных связей касательными усилиями q (рис. 23, *б*) и рассмотрим равновесие элементов. Проектируя на вертикаль все силы, приложенные к стержню CD , получим

$$P \sin \alpha - qb = 0; q = \frac{P \sin \alpha}{b} = \frac{P}{AC}$$

Сумма проекций всех сил, действующих на стержень AD , дает

$$P \cos \alpha - qb = 0; q = \frac{P \cos \alpha}{b} = \frac{P}{AC}$$

Т.о., по краям элемента действуют равные по величине потоки касательных усилий, что соответствует закону парности касательных напряжений, известному из курса сопротивления материалов.

Окаймляющие стержни испытывают действие продольных сил N .

В рассматриваемом примере силы отрицательны, так как стержни работают на сжатие. Наибольшая продольная сила равна внешней силе, действующей вдоль данного стержня. Затем она постепенно уменьшается за счет противоположно направленных усилий q . Для построения эпюры N рассмотрим произвольное сечение стержня CD на расстоянии y от нижнего конца D (рис. 23, *в*) и просуммируем все усилия, сжимающие отсеченную часть стержня $N = q \cdot y$.

Таким образом, продольная сила в стержне CD меняется по длине линейно от нуля при $y = 0$ до $N = q \cdot b = P \sin \alpha$ в точке C .

Эпюры N для остальных стержней строятся аналогично. Они изображены на рис. 23, *б* в виде заштрихованных треугольников.

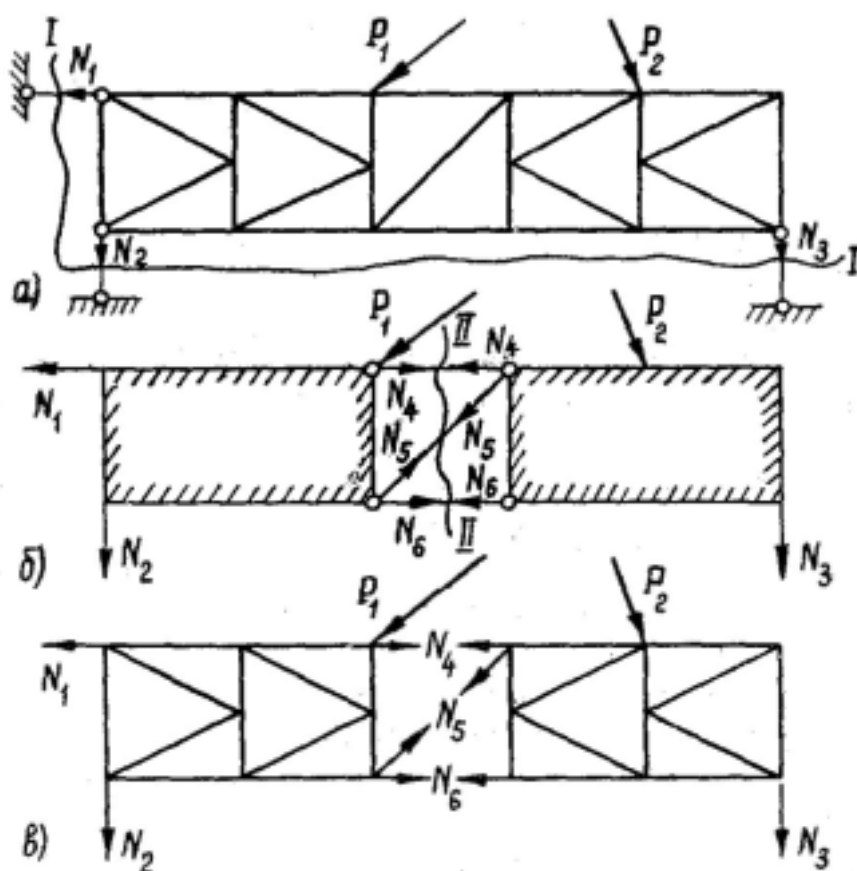
Знаки на эпюрах указывают на сжатие (минус). Растяжение отмечается знаком «плюс».

Эпюры N показывают, как стержни постепенно передают сосредоточенную нагрузку на пластинку. В точке приложения силы последняя целиком воспринимается стержнем. Затем стержень постепенно разгружается, передавая нагрузку на пластинку в виде потока касательных усилий q .

Соединяя между собой стержневые треугольники или четырехугольные тонкостенные панели, окаймленные стержнями, получают **сложные неизменяемые плоские конструкции разнообразных форм (жесткие диски)**.

Неподвижное прикрепление плоских ферм и тонкостенных конструкций **обеспечивается тремя стержнями**, непересекающимися в одной точке. Их расчет следует начинать с вычисления **усилий в прикрепляющих стержнях**.

Порядок расчета прикрепленной фермы рассмотрим на примере схемы, показанной на рис. а.



Сквозным сечением I—I отделяем ферму от опор и, рассматривая ее как плоский диск, вычисляем усилия N_1 , N_2 , N_3 в прикрепляющих стержнях.

Ферма построена так, что и после определения реакций ее невозможно рассчитать по методу последовательного вырезания двухстержневых узлов. Ее можно **рассматривать как соединение двух ферменных дисков стержнями 4, 5, 6** (рис., б).

Проводим сквозное сечение II—II, вычисляем усилия N_4 , N_5 , N_6 из условий равновесия одного из дисков.

Затем вычисляем усилия в каждом из ферменных дисков (рис., в), нагруженных заданными силами и найденными усилиями в перерезанных стержнях. Здесь уже имеются двухстержневые узлы, начиная с которых можно провести расчет всех усилий.

Метод сквозных сечений весьма удобен в том случае, когда необходимо найти усилие в стержне фермы, далеко отстоящем от концевого двухстержневого узла.

Пример.

Для определения по методу вырезания узлов усилия в стержне 9–11 фермы, пришлось бы вычислить большое количество усилий, пока мы дошли бы до нужного стержня.

Расчет не требует большой вычислительной работы, если провести сквозное сечение I–I и рассматривать равновесие правой части фермы, как плоского диска, прикрепленного тремя стержнями: 9–11, 9–12, 10–12. Усилие N находится из уравнения моментов всех сил, действующих на правую часть фермы⁹⁻¹¹, относительно точки 12, в которой пересекаются два прикрепляющих стержня: 9–12 и 10–12. Сквозные сечения следует выбирать таким образом, чтобы пересечь не более трех стержней.

6. КОНСТРУКЦИИ С ЛИШНИМИ СВЯЗЯМИ

Неизменяемые конструктивные элементы и простейшие **конструкции содержат минимально необходимое число связей для обеспечения неизменяемости**. В силу этого они являются **статически определимыми**. **Усилия в них определяются уравнениями равновесия**. Удаление любой связи в такой конструктивной схеме приводит к ее разрушению, превращая ее в механизм.

С целью повышения надежности и живучести конструкции применяются **статически неопределимые схемы, содержащие большее количество связей, чем это необходимо для сохранения геометрической неизменяемости**.

Пример.

Прикрепление узла в плоскости тремя и более стержнями, а в пространстве — четырьмя (или более) стержнями является статически неопределимым.

Разрушение одного стержня статически неопределимой конструкции может несколько уменьшить ее жесткость, но не ведет к немедленному разрушению.

Ферма на рис. а, содержит 4 узла и 9 стержней.

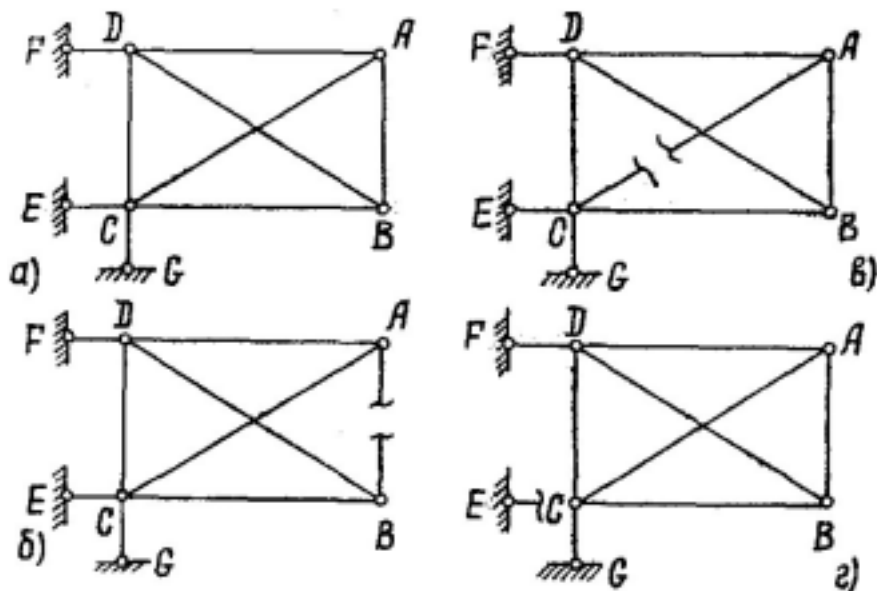
Минимально необходимое количество стержней для плоской фермы согласно равно: $s = 2n = 2 \cdot 4 = 8$.

Рассматриваемая схема содержит на один стержень больше и, следовательно, является **один раз статически неопределимой**.

Разрушение одного стержня (АС или АВ), делает ферму статически определимой (рис., в); разрушение еще одного стержня окончательно выводит конструкцию из строя.

Лишние стержни в статически неопределимой системе не могут усилить конструкцию в целом, а усиливают лишь какую-то часть ее, в то время как остальная часть конструкции по-прежнему остается статически определимой и разрушение любого стержня этой части делает конструкцию механизмом.

Ферма рис., а представляет собой статически неопределимый ферменный диск, прикрепленный тремя стержнями, т.е. статически определимым образом. Разрушение любого из стержней ЕС, DF, CG ведет к разрушению конструкции (рис., г), хотя ферма ABCD остается при этом статически неопределимой.



Лишние связи применяются:

- с целью местного усиления конструкции;
- результат технологических особенностей конструкции (сварные узлы в фермах);
- представляют элементы, поставленные не для увеличения прочности и жесткости, а из других конструктивных соображений. Здесь они обычно играют *вспомогательную роль* и воспринимают значительно меньшие усилия, чем основные элементы силовой схемы.

Нахождение усилий в статически неопределимых системах требует решения системы канонических уравнений. Метод расчета известен читателю из курса сопротивления материалов.

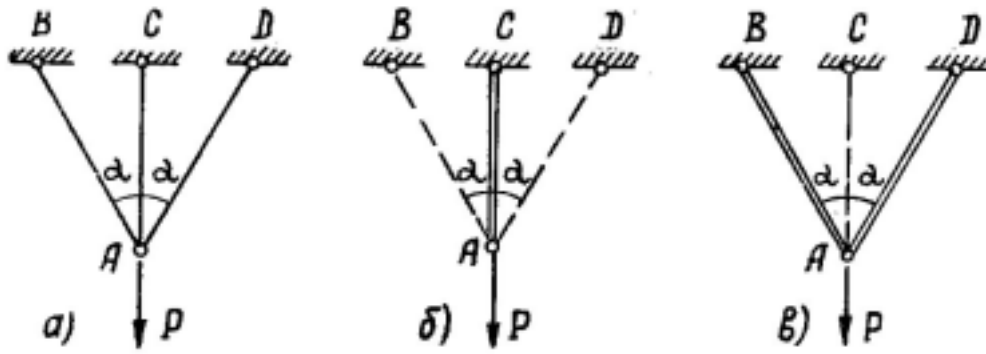
Реальные конструкции обычно содержат большое количество лишних связей (десятки, а иногда и сотни). Вычисление коэффициентов и свободных членов и решение системы канонических уравнений с большим числом неизвестных – чрезвычайно трудоемкая работа, реально осуществляемая лишь при помощи ЭВМ.

Более практичным является приближенное определение усилий, при котором удастся сильно упростить расчетную схему и свести к минимуму количество лишних неизвестных, пренебрегая теми связями, в которых заданная нагрузка не будет вызывать больших усилий.

Усилия в элементах статически неопределимой системы зависят от жесткости элементов. Это свойство используется для упрощения расчетной схемы реальных конструкций.

Пример.

Под действием силы P стержни, прикрепляющие узел, удлиняются неодинаково. Удлинения подчинены условию совместности деформаций. При фиксированном значении перемещения узла Δ **абсолютные деформации стержней зависят только от геометрической схемы узла, но относительные деформации стержней ϵ , а значит, и напряжения σ в стержнях будут зависеть от длины стержня: более длинный стержень легче вытянуть на ту же величину λ , чем короткий.**



Существенную роль играет также **площадь поперечного сечения** и **модуль упругости материала стержней**.

Более толстый стержень труднее вытянуть на ту же величину λ , чем короткий.

Изменение жесткости стержней ведет к изменению величины силы P , потребной для создания перемещения Δ и к изменению усилий в стержнях узла.

Жесткость стержня на растяжение k равна:

$$k = \frac{EF}{l},$$

где E – модуль упругости материала;

F – площадь поперечного сечения;

l – длина стержня.

При постоянной силе P изменение жесткости ведет к перераспределению усилий в стержнях и изменению величины Δ полного перемещения узла.

Для трехстержневого узла (рис. а) стержни которого имеют одинаковое сечение и сделаны из одинакового материала, распределение усилий зависит только от соотношения длин стержней, т.е. – от угла α .

Средний стержень короче боковых и усилие в нем всегда самое большое. При увеличении угла α боковые стержни удлиняются и усилия в них уменьшаются. При α , близких к 90° , вся нагрузка практически воспринимается средним стержнем, а усилия в боковых стержнях будут близки к нулю.

Если считать угол α , а значит, и все длины стержней неизменными, то перераспределения усилий можно добиться путем изменения площади сечения или модуля материала стержней.

На рис., б показан узел с очень толстым средним стержнем и тонкими боковыми стержнями (последние изображены пунктиром). Ясно, что в этом случае сила P целиком воспринимается средним стержнем, а боковые будут деформироваться под действием очень малых сил. Наоборот, увеличение сечения боковых стержней и уменьшение сечения среднего стержня (рис., а) ведет к нагружению боковых стержней и разгрузке среднего стержня, показанного пунктиром.

В пределе, при бесконечно малой жесткости среднего стержня, получается статически определимый плоский узел, прикрепленный двумя боковыми стержнями.

Чем больше разница в жесткостях элементов статически неопределимой системы, тем больше различие в величине усилий, действующих в этих элементах. Обычно усилия в элементах малой жесткости оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с нагрузкой жестких элементов, которые являются основными силовыми элементами статически неопределимой конструкции.

При расчете реальной конструкции важно правильно выбрать расчетную схему, пренебрегая элементами, в которых действуют заведомо малые усилия.

Таким способом удастся сильно уменьшить степень статической неопределимости системы. *Желательно, чтобы расчетная схема была статически определенной или, в крайнем случае, однажды статически неопределимой.*

Выбор расчетной схемы определяется не только размерами и формой элементов конструкции, но и способом ее нагружения.

Изменение нагрузки изменяет и характер работы отдельных элементов. Поэтому одной и той же конструкции может соответствовать несколько расчетных схем.

Для авиационных конструкций выработан ряд стандартных приемов, позволяющих упростить расчет без существенного ухудшения точности результатов.

Разобранная классификация конструктивных элементов является одним из средств создания упрощенных расчетных схем.

Она позволяет среди множества разнообразных элементов определить и выбрать такие, которые в основном выполняют какую-то определенную функцию: *работают на растяжение (стержни), на изгиб (балки), на кручение (оболочки, валы), на сдвиг (пластинки)* и т.п.

О

предделение в элементах любой авиационной конструкции разбивается на три этапа:

- 1) **выбор рациональной расчетной схемы**, учитывающей как особенности самой конструкции, так и условия ее нагружения;
- 2) **расчет усилий в элементах схемы;**
- 3) **экспериментальная проверка** расчетных усилий на модели или на реальной конструкции.

Первый этап. содержит в себе принципиальные трудности, так как для выбора правильной расчетной схемы необходимо ясно представлять назначение каждого силового элемента и особенности работы всей конструктивной схемы в целом. На этом этапе расчета большую помощь инженеру оказывает сравнительный анализ работы ранее выполненных и надежно функционирующих конструкций, а также экспериментальное изучение напряжений на моделях.

На втором этапе используются методы строительной механики, в узком смысле слова, как науки, разрабатывающей приемы вычисления усилий в балках, оболочках и системах, состоящих из стержней и пластинок. Эти методы опираются на статику и теорию расчета статически неопределимых систем, известную из курса сопротивления материалов.

Напряжения, получаемые в результате второго этапа расчета, служат критерием правильности размеров, предварительно определенных на первом этапе конструирования грубо приближенными методами. Они выявляют наличие слабых

мест или недогруженных элементов конструкции и позволяют внести необходимые коррективы.

Третий этап (экспериментальное определение напряжений на модели или натурной конструкции) совершенно необходим для окончательного установления прочностной надежности и целесообразности конструкции летательного аппарата. Стремление к максимальному облегчению всех агрегатов заставляет сводить к минимуму коэффициент запаса прочности, и поэтому неточности, допускаемые при составлении расчетной схемы, могут превзойти величину, покрываемую коэффициентом запаса. Действительное распределение напряжений может оказаться таким, что отдельные элементы будут перегружены и надежность конструкции окажется недостаточной. Проведение испытаний либо убеждает в правильности расчета, либо подсказывает пути улучшения конструкции.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1. Основные допущения

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, которая в естественном незагруженном состоянии имеет форму цилиндрической оболочки.

Поверхность, делящую пополам толщину оболочки, условимся называть срединной поверхностью. Пересечение этой поверхности с плоскостью поперечного сечения будем называть средней линией сечения (штрих-пунктирная линия на рис. 1.1).

Материал, из которого изготовлена оболочка, и ее толщина могут быть различными по контуру сечения, но вдоль продольной оси Z оболочки будем считать их неизменяющимися. Материал предположим идеально упругим, подчиняющимся закону Гука при любых деформациях.

Полагаем, что конструкция имеет достаточное количество поперечных диафрагм (нервюр), жестких в своей плоскости. Благодаря этому форма поперечного сечения при нагружении оболочки не изменяется.

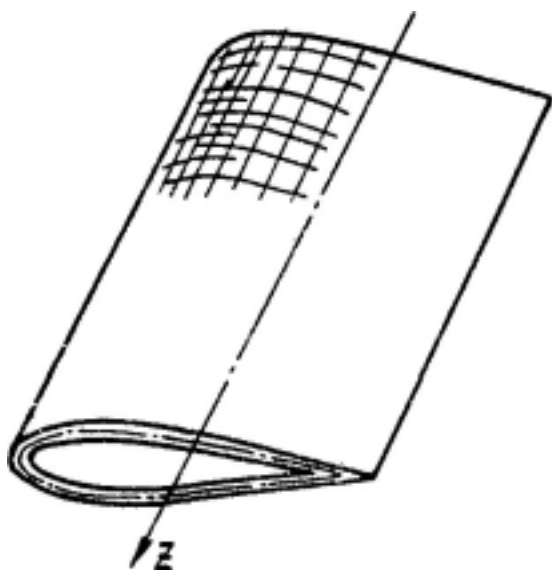


Рис. 1.1

Толщину оболочки считаем достаточно малой, что позволяет принять нормальные и касательные напряжения равномерно распределенными по толщине.

Примем следующее допущение о характере деформаций конструкции. Будем считать, что относительные удлинения e волокон обшивки в направлении оси Z подчиняются закону плоскости:

$$e_{zz} = ax + by + c, \quad (1.1)$$

где x и y – декартовы координаты точек средней линии сечения (плоскость XOY , совпадает и плоскостью сечения).

Если от плоскости поперечного сечения отложить в направлении оси Z вектора, равные относительной деформации e в данной точке средней линии сечения, то согласно принятому допущению концы векторов будут лежать в одной плоскости (рис. 1.2).

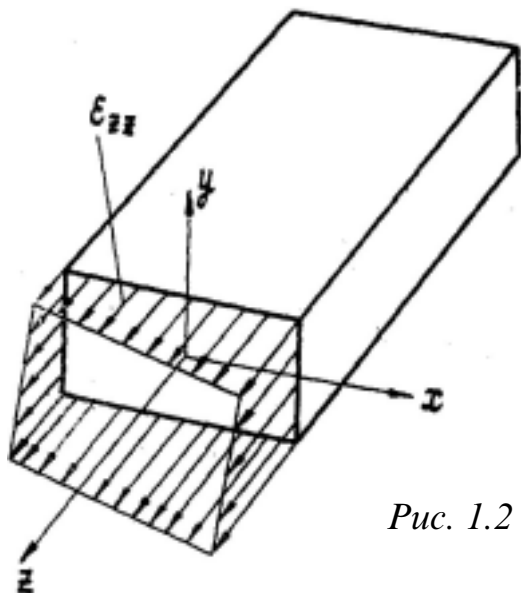


Рис. 1.2

1. 2. Определение нормальных напряжений в сечении тонкостенной конструкции

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с произвольным однозамкнутым (круговую цилиндрическую оболочку) контуром поперечного сечения (рис. 1.3).

Рассечем мысленно оболочку на две части плоскостью, перпендикулярной к ее образующим, одну часть отбросим и рассмотрим силы, с которыми эта часть конструкции действует на оставшуюся. Пусть в этом сечении изгибающие моменты M_x и M_y , а также нормальные усилия N_z известны.

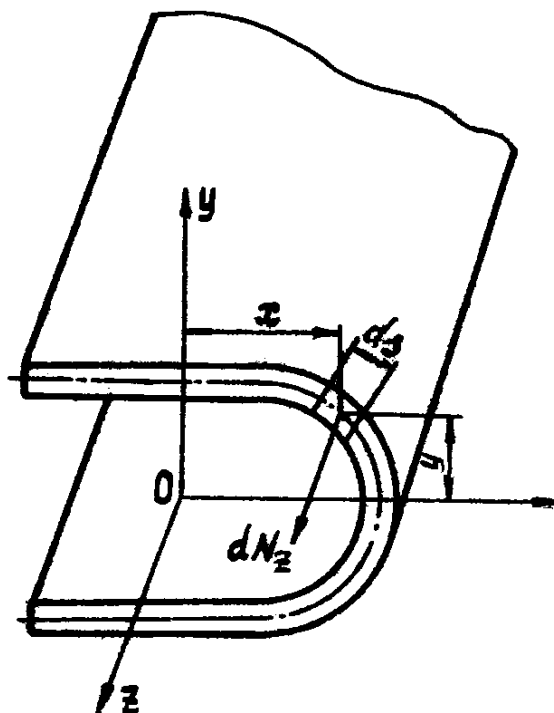


Рис. 1.3

Выделим в плоскости XOY бесконечно малый элемент поперечного сечения длиной ds . При изгибе конструкции в поперечном сечении возникают нормальные напряжения σ . Так как напряжения по толщине оболочки постоянны, то равнодействующая dN нормальных усилий в пределах выделенного элемента ds будет равна:

$$dN = \sigma \delta ds, \quad (1.2)$$

где σ – нормальное напряжение в элементе, δ – толщина оболочки. Сила dN даст относительно оси x элементарный момент, равный

$$dM = \sigma y \delta ds, \quad (1.3)$$

Проинтегрировав правую часть последнего равенства по всему сечению, получим момент внутренних усилий относительно оси X . Он должен быть равен изгибающему моменту в сечении

$$M_x = \int \sigma y \delta ds. \quad (1.4)$$

Аналогично рассуждая, получим для изгибающего момента относительно оси z равенство:

$$M_z = \int \sigma x \delta ds. \quad (1.5)$$

Равнодействующая всех нормальных усилий будет равна

$$N_z = \int \sigma \delta ds. \quad (1.6)$$

Для определения нормальных напряжений воспользуемся законом Гука:

$$\sigma = E \varepsilon_{zz}. \quad (1.7)$$

Здесь E – модуль упругости материала оболочки.

Если конструкция изготовлена из различных материалов, то модуль упругости для разных участков сечения не будет одинаковым. Для удобства дальнейших рассуждений приведем все элементы сечения к одному материалу с модулем упругости E_0 , для чего равенство (1.7) перепишем в следующем виде:

$$\sigma = \frac{E}{E_0} E_0 \varepsilon_{zz}. \quad (1.8)$$

Отношение истинного модуля материала E к модулю E_0 назовем редуцированным коэффициентом (коэффициентом приведения) и обозначим его через φ :

$$\varphi = \frac{E}{E_0}. \quad (1.9)$$

Тогда равенство (1.8) можно записать иначе:

$$\sigma = \varphi E_0 \varepsilon_{zz} . \quad (1.10)$$

Подставив в последнее равенство ε_{zz} из формулы (1.1), получим:

$$\sigma = \varphi E_0 (ax + by + c) = \varphi (Ax + By + C) , \quad (1.11)$$

где $A = aE_0$, $B = bE_0$, $C = cE_0$ – некоторые константы.

Отметим, что произведение

$$E_0 (ax + by + c) = \sigma_r . \quad (1.12)$$

есть, очевидно, напряжение в волокне, если бы оно было изготовлено из материала с модулем упругости E_0 .

Тогда можно записать:

$$\sigma = \varphi \sigma_r \quad (1.13)$$

Условия для определения констант A , B , C можно получить из равенств (1.4)–(1.6). Подставив в них выражения (1.11) для нормального напряжения, будем иметь:

$$\begin{aligned} M_x &= A \int_{\ell} \varphi x y \delta ds + B \int_{\ell} \varphi y^2 \delta ds + C \int_{\ell} \varphi y \delta ds, \\ M_y &= A \int_{\ell} \varphi x^2 \delta ds + B \int_{\ell} \varphi x y \delta ds + C \int_{\ell} \varphi x \delta ds, \\ N_z &= A \int_{\ell} \varphi x \delta ds + B \int_{\ell} \varphi y \delta ds + C \int_{\ell} \varphi \delta ds. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Проанализируем полученные выражения. Используя зависимости (1.6) и (1.13), можно записать

$$N_z = \int \sigma \delta ds = \int \sigma_r \varphi \delta ds$$

откуда следует, что произведение $\varphi \delta ds$ представляет собой площадь сечения элемента, изготовленного из материала с модулем упругости E_0 и работающего с напряжениями σ . Величину $\varphi \delta ds = dF$ будем называть приведенной к модулю упругости E_0 площадью элемента. Тогда интеграл

$$\int \varphi \delta ds = F_r ,$$

можно назвать приведенной к модулю E_0 площадью поперечного сечения. Индексом r будем отмечать другие геометрические характеристики приведенного

сечения. Так, например, интегралы $\int_{\ell} \varphi y \delta ds = S_{rx}$, $\int_{\ell} \varphi x \delta ds = S_{ry}$ представляют собой статические моменты, а $\int_{\ell} \varphi y^2 \delta ds = I_{rx}$,

$$\int_{\ell} \varphi x^2 \delta ds = I_{ry},$$

$\int_{\ell} \varphi xy \delta ds = I_{rxy}$ – моменты инерции приведенного сечения относительно осей X и Y .

Значения статических моментов и моментов инерции зависят как от геометрии поперечного сечения, так и от выбранной системы координат. Если начало координат совпадает с центром тяжести приведенного сечения, то статические моменты S и S обращаются в нуль. Если, кроме того, оси X и Y направлены по главным осям инерции приведенного сечения, то центробежный момент инерции $I_{rxy} = 0$. В этом случае из равенств (1.14) имеем:

$$A = \frac{M_y}{I_{ry}}, B = \frac{M_x}{I_{rx}}, C = \frac{N_r}{F_r}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.11), получим следующую окончательную формулу для определения нормальных выражений:

$$\sigma = \varphi \left(\frac{M_y}{I_{ry}} x + \frac{M_x}{I_{rx}} y + \frac{N_z}{F_z} \right). \quad (1.16)$$

Если все элементы конструкции изготовлены из одного материала, то редуцированный коэффициент $\varphi = 1$, и мы приходим к **известной формуле сопротивления материалов для нормальных напряжений при косом изгибе и растяжении бруса.**

Приведенный метод определения нормальных напряжений называется **методом редуцированных коэффициентов.** Метод был предложен известным кораблестроителем Бубновым И.Г. Здесь нами рассмотрен простейший вариант метода Бубнова, когда материал конструкции подчиняется закону Гука.

По формуле (1.16) можно определить напряжения в тонкостенных конструкциях с разомкнутым, однозамкнутым и многозамкнутым контуром поперечного сечения.

Пример расчета нормальных напряжений в тонкостенной конструкции

Пусть требуется определить нормальные напряжения в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия изгибающего момента M (рис. 1,4). Точка O совпадает с центром тяжести поперечного сечения, оси x и y являются главными центральными осями инерции из-за симметрии сечения. Так как конструкция изготовлена из одного материала, редуцированный коэффициент ($\varphi = 1$).

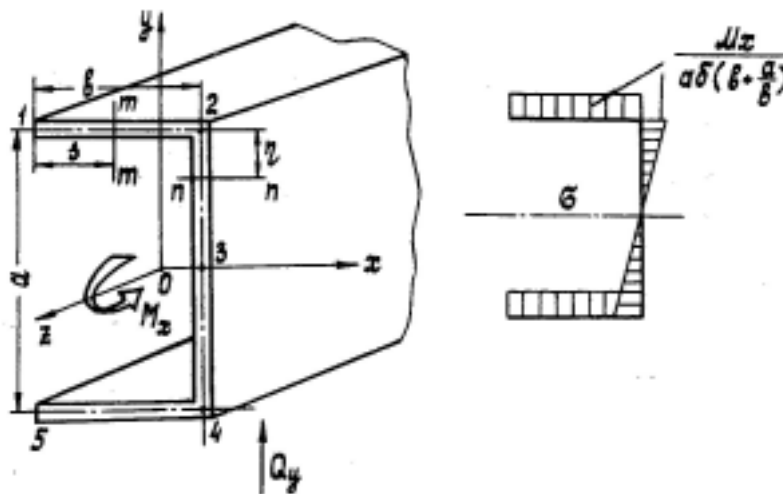


Рис. 1.4

Момент инерции можно представить в виде суммы моментов инерции отдельных частей сечения: $I_x = I'_x + 2I''_x$

где $I'_x = \frac{\delta a^3}{12}$ — момент инерции вертикальной стенки, а

$I''_x = \frac{\delta b a^2}{4}$ — момент инерции горизонтальной полки.
Тогда,

$$I_x = \frac{\delta a^3}{12} + \frac{\delta b a^2}{4} = \frac{\delta a^2}{2} \left(b + \frac{a}{3} \right) \quad (1.17)$$

Вычисления по формуле (1.16) приведут к эпюре напряжений, представленной на рис. 1.4.

Максимальные напряжения будут иметь место в точках контура со значением $y = a/2$. При $M = 1 \cdot 10^5$ Нм, $\delta = 0,2$ см, $a = 50$ см, $b = 20$ см они станут равными $\sigma_{\max}^x = 353$ Мпа.

1.4. Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях, подкрепленных продольным набором

Реальные авиационные конструкции имеют, как правило, продольные силовые элементы – лонжероны, стрингеры. Продольные элементы (пояса) занимают небольшой участок поперечного сечения. В связи с этим можно считать, что сечение представляет собой тонкостенный контур, в ряде точек которого расположены как бы некоторые сосредоточенные площади (рис. 1.6).

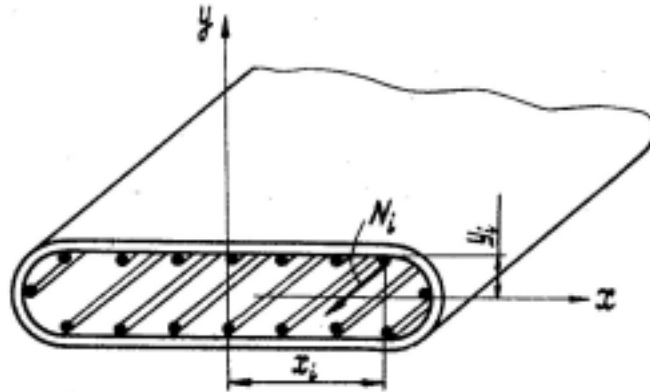


Рис. 1.6

В пределах каждого элемента нормальные напряжения σ можно считать постоянными. Тогда нормальное усилие в поясе с номером i будет $N = \sigma F$, при этом равнодействующая всех нормальных усилий N_z , и изгибающие моменты в сечении конструкции будут равны:

$$N_z = \oint \sigma \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i F_i \quad (1.18)$$

$$M_x = \oint \sigma y \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i F_i \quad (1.19)$$

$$M_y = \oint \sigma x \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i F_i \quad (1.20)$$

Чтобы поручить формулу для вычисления нормальных напряжений, необходимо повторить вывод, аналогичный изложенному в 1.2, учитывая, что напряжения в оболочке и в поясах (σ и σ_i соответственно) определяются в соответствии с плоским законом распределения деформация:

$$\sigma = \varphi(Ax + By + C) \quad (1.21)$$

$$\sigma_i = \varphi_i(Ax_i + By_i + C) \quad (1.22)$$

Подставляя зависимости (1.21) и (1.22) в равенства (1.18)–(1.20), придем к следующей окончательной формуле:

$$\sigma = \varphi \left(\frac{M_x}{I_{rx}} y + \frac{M_y}{I_{ry}} x + \frac{N_z}{F_r} \right) \quad (1.23)$$

Полученная формула имеет такой же вид, как и для неподкрепленной конструкции.

При вычислении приведенной площади F_r и моментов инерции необходимо учитывать продольные элементы.

Для конструкции на рис. 1.6, будем иметь:

$$F_r = \oint \varphi \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i \quad (1.24)$$

$$I_{rx} = \oint \varphi y^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i$$

F — площадь поперечного сечения элемента продольного набора,
 n^i — число продольных элементов.

По мере уменьшения толщины обшивки доля изгибающего момента, воспринимаемого оболочкой, уменьшается. Чем мощнее пояса, тем большую часть изгибающего момента они могут воспринять.

В конструкции с очень тонкой обшивкой доля изгибающего момента, воспринимаемого ею, становится настолько незначительной, что можно работой обшивки пренебречь. Тогда при вычислении приведенных моментов инерции и площадей можно учитывать только площади сечений продольных поясов, т.е.

$$\begin{aligned} I_{rx} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i \\ I_{ry} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 F_i \\ F_r &= \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i \end{aligned} \quad (1.25)$$

II. Расчёт касательных напряжений

2.1. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Будем полагать, что поверхность оболочки свободна от касательных сил, действующих в направлении оси Z . Если бы такие силы действовали на поверхности, то, согласно принципу парности касательных напряжений, вектор касательного напряжения в сечении вблизи поверхности τ имел бы составляющую, нормальную к поверхности (рис. 2.1).^z

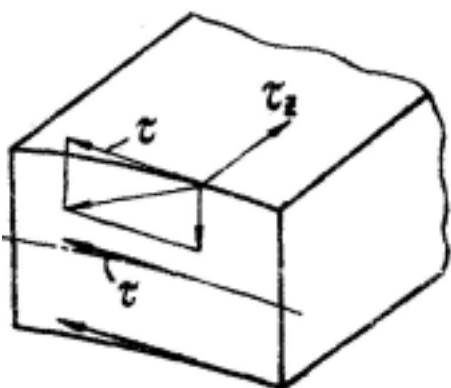


Рис. 2.1

Отсутствие на поверхности оболочки внешних нагрузок, параллельных оси Z , приводит к тому, что в поперечном сечении вблизи поверхности вектор касательного напряжения τ направлен по касательной к контуру сечения. Т.к. оболочка тонкая, то вектор касательного напряжения считают направленным по средней линии контура.

Пусть требуется определить касательные напряжения в точке b поперечного сечения конструкции, представленной на рис. 2.2. Для простоты рассуждений полагаем, что имеет место только изгиб относительно оси X . Тогда $M_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $M_y = 0$, $Q_x = 0$, $N = 0$.

^z Оси X и Y здесь и в дальнейшем — главные центральные оси поперечного сечения, приведенного к одному материалу.

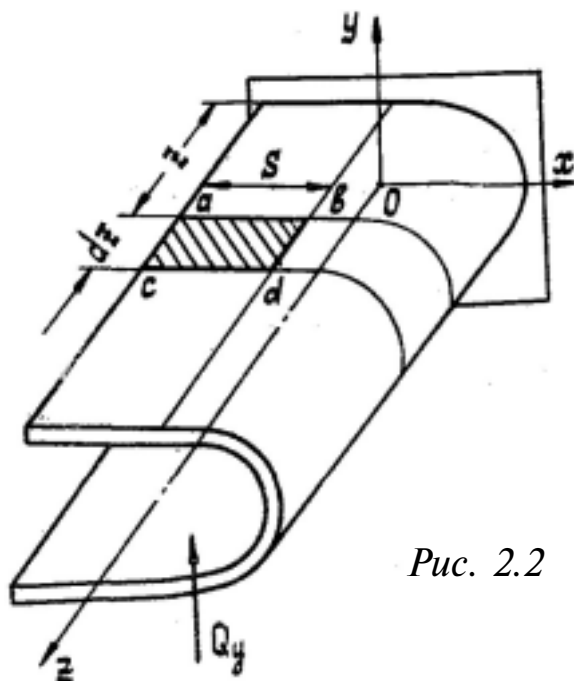


Рис. 2.2

Проведем мысленно через точку b сечение, перпендикулярное оси Z , и еще одно по образующей перпендикулярно к срединной поверхности.

Третье сечение проведем на расстоянии dz от точки b . Рассмотрим равновесие элемента $abcd$, выделенного таким образом (рис. 2.3).

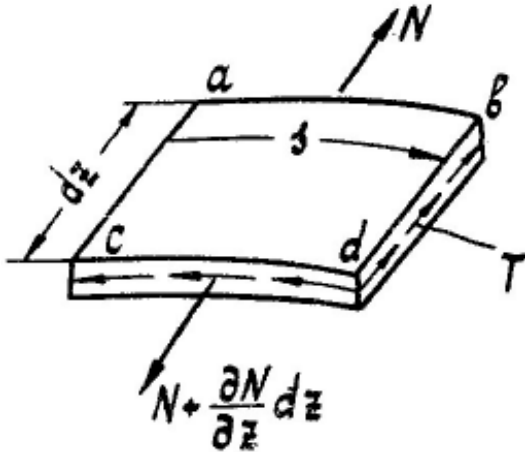


Рис. 2.3

При изгибе конструкции в ее элементах возникают нормальные напряжения. Обозначим равнодействующую нормальных усилий в площадке ab поперечного сечения через N . В площадке cd равнодействующая нормальных усилий равна $(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz)$, т.к. от сечения к сечению изгибающий момент меняется. Равновесие выделенного элемента возможно лишь в том случае, когда в продольном разрезе bd действуют касательные напряжения.

Как говорилось ранее, напряжения τ в тонкостенных конструкциях можно считать постоянными по толщине. Это позволяет оперировать не напряжениями, а погонными усилиями $T = \tau \delta$, приходящимися на единицу длины сечения.

Спроектируем все силы, действующие на элемент $abcd$, на ось Z :

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) - N - Ndz = 0 \quad (2.1)$$

Отсюда

$$T = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (2.2)$$

Равнодействующая нормальных усилий N равна

$$N = \int_0^s \sigma \delta ds \quad (2.3)$$

Для нормальных напряжений σ в случае изгиба относительно оси X имеем:

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{I_{rx}} y . \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в равенство (2.3) и учтем, что M_x и I_{rx} от координаты s не зависят:

$$N = \frac{M_x}{I_{rx}} \int_0^s \varphi y \delta ds . \quad (2.5)$$

Интеграл в последнем равенстве представляет собой статический момент относительно оси X части приведенного сечения, заключенной между свободным краем конструкции (точка a) и точкой b , где определяются касательные напряжения

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds . \quad (2.6)$$

Тогда

$$N = \frac{M_x}{I_{rx}} S_{rx} . \quad (2.7)$$

Теперь остается согласно (2.2) продифференцировать правую часть полученного равенства. При этом нужно иметь в виду, что I_{rx} есть величина постоянная, S_{rx} от координаты Z не зависит, а перерезывающая сила Q_y связана с изгибающим моментом известной

зависимостью $Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$.

Тогда

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} . \quad (2.8)$$

Итак, получили формулу для определения величины погонной касательной силы T в продольном разрезе, проходящем через точку b . В соответствии с принципом парности касательных напряжений, в точке b поперечного сечения будет действовать такая же погонная касательная сила.

Анализ формулы показывает, что вдоль оси Z погонные касательные силы изменяются пропорционально перерезывающей силе Q_y , а по сечению — пропорционально статическому моменту S_{rx} . Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{Q_y S_{rx}}{I_{rx} \delta} \quad (2.9)$$

Проведя аналогичный вывод для случая изгиба относительно оси Y , получим следующую формулу:

$$T = \frac{Q_x}{I_{ry}} S_{ry} \quad (2.10)$$

При одновременном изгибе относительно осей X и Y результаты, полученные по формулам (2.8) и (2.10), нужно алгебраически просуммировать.

Если конструкция не имеет продольных элементов, то эпюра статических моментов S , вычисленных по (2.6), будет плавной, без скачков. Ординаты эпюры статического момента будут возрастать до нейтральной оси X (рис. 2.4а).

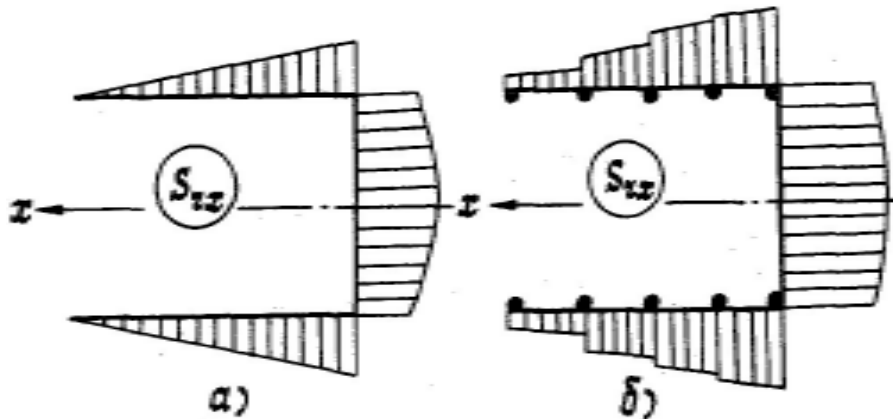


Рис. 2.4

Если же оболочка подкреплена продольным набором, то статический момент будет определять формула

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i \quad (2.11)$$

где m — число продольных элементов на участке дуги длиной от начала координат.

При этом эпюра S будет иметь вид (2.4 б).

В случае очень тонкой обшивки **нормальными усилиями в ней пренебрегают** и считают, что **обшивка работает только на сдвиг**. Величина статического момента S в этом случае подсчитывается по формуле

$$S_{rx} = \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i \quad (2.12)$$

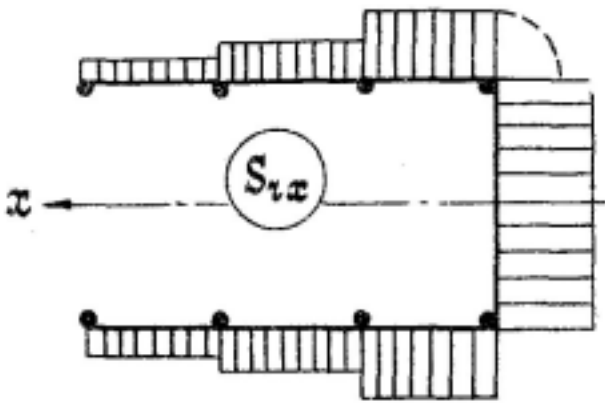


Рис. 2.5

При этом на эпюре статических моментов на участках между соседними поясами значения статического момента остаются постоянными (рис. 2.5).

2.2. Примеры расчета касательных напряжений в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Пример 1. Определим погонные касательные усилия в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия перерезывающей силы Q . Размеры сечения и нагрузка показаны на рис. 1.4.

Момент инерции поперечного сечения был найден в 1.3 и получился равным

$$I_x = \frac{\delta a^2}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right) \quad (2.13)$$

Для определения касательных напряжений найдем статический момент для сечения $m - m$ верхней полки на расстоянии s от свободного края сечения

$$S_x^{m-m} = \frac{\delta a}{2} s$$

Для сечения $n - n$ на расстоянии η от верхней полки

$$S_x^{n-n} = \frac{\delta ab}{2} + \delta \eta \left(\frac{2}{a} = \frac{\eta}{2} \right) = \frac{\delta ab}{2} + \frac{1}{2} \delta \eta (a - \eta) \quad (2.14)$$

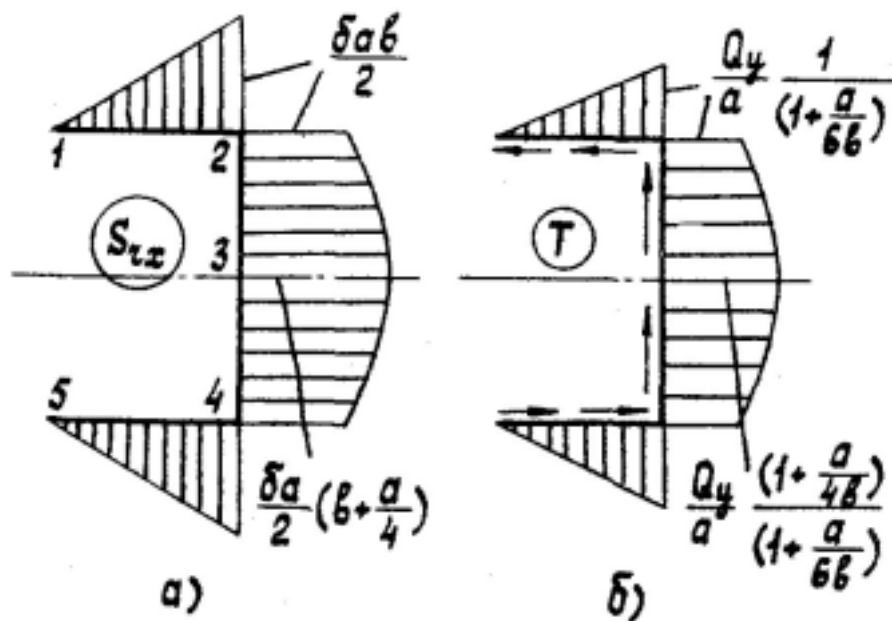


Рис. 2.6

Отсюда видно, что на горизонтальной полке статический момент изменяется по линейному закону, а на вертикальной стенке — по закону квадратной параболы. Эпюра изменения статического момента по сечению представлена на рис. 2.6 а. Умножив все ординаты этой эпюры на постоянный множитель $\frac{Q}{I} y^x$, получим эпюру погонных касательных сил T (рис. 2.6 б). Максимальное значение погонной касательной силы будет в точке 3 сечения. При значении силы $Q = 5000 \text{ Н}$, $\delta = 0,2 \text{ см}$, $a = 50 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$ оно будет равно $T_{max} = 114,7 \text{ Н/см}$.

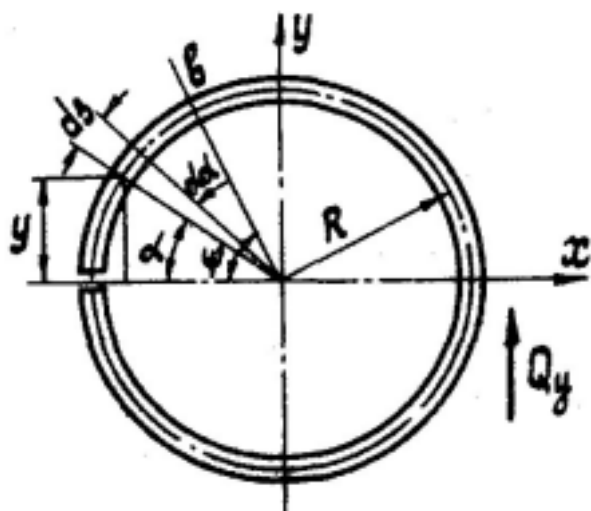


Рис. 2.7

Пример 2. Определим теперь погонные касательные силы в тонкостенной конструкции, представляющей собой круговую цилиндрическую оболочку, разрезанную по образующей (рис. 2.7).

Для определения момента инерции сечения конструкции выделим бесконечно малый элемент, определяемый двумя радиусами — под углом α и $\alpha + d\alpha$ от края контура.

Момент инерции этого элемента равен

$$dI_x = \delta y^2 ds = \delta(R \sin \alpha)^2 R d\alpha .$$

Интегрируя это выражение по α в пределах от 0 до 2π , имеем:

$$I_x = \delta R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \delta R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \delta R^3 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \delta R^3 . (2.15)$$

Найдем касательные напряжения в точке b , определяемые углом ψ (рис. 2.7). Для этого нужно найти статический момент соответствующей части поперечного сечения. Вычислим сначала статический момент выделенного бесконечно малого элемента

$$dS_x = \delta y ds = \delta R \sin \alpha d\alpha$$

Интегрируя по α в пределах от 0 до ψ , получим

$$S_x = \delta R^2 \int_0^{\psi} \sin \alpha d\alpha = -\delta R^2 \cos \alpha \Big|_0^{\psi} = \delta R^2 (1 - \cos \psi)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.8), имеем

$$T = \frac{Q_y}{\pi R} (1 - \cos \psi) . \quad (2.16)$$

Эпюры статического момента и погонных касательных сил показаны на рис. 2.8 *а, б*.

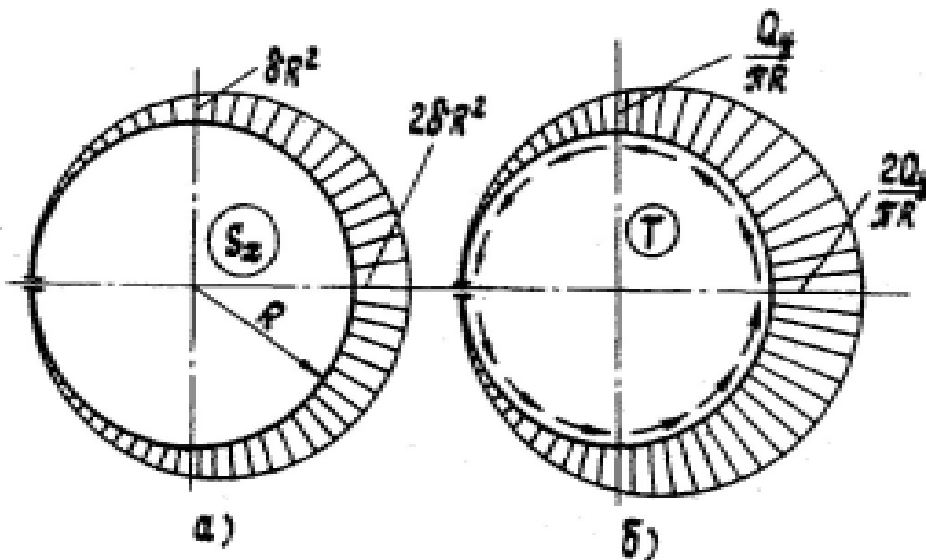


Рис. 2.8

Найденные погонные касательные силы представляют собой внутренние силы, т.е. силы, с которыми одна часть конструкции через данное сечение действует на другую ее часть. Если рассматривается действие отсеченной части консоли **А** на оставшуюся часть **В** (рис. 2.9), то равнодействующая касательных напряжений должна быть направлена в сторону внешней нагрузки. Если же рассматривается

действие оставшейся части на отсеченную, то касательные напряжения должны быть направлены так, чтобы они уравнивали внешнюю нагрузку, т.е. равнодействующая касательных сил должна быть направлена против внешней нагрузки.

Условимся везде рассматривать действие отсеченной части на оставшуюся. Следовательно, погонные касательные силы будут давать равнодействующую, направленную в сторону внешней нагрузки (рис. 2.6 б и 2.8 б).

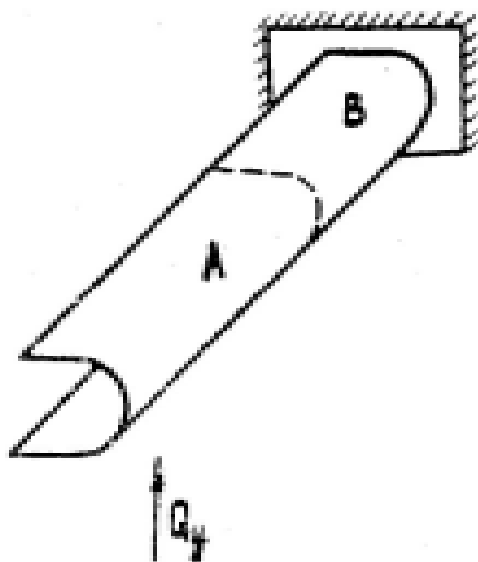


Рис. 2.9

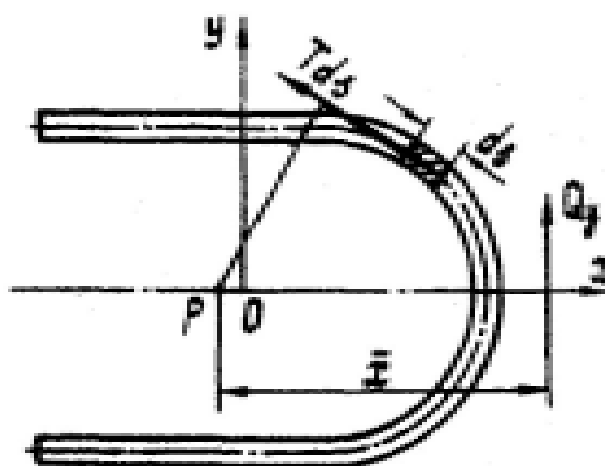


Рис. 2.10

2.3. Центр изгиба открытых сечений

Рассмотрим изгиб конструкции с открытым контуром поперечного сечения относительно оси X . Произведение $T ds$ (рис. 2.10) представляет собой элементарную касательную силу. Сумма проекций всех элементарных касательных сил на ось Y должна равняться перерезывающей силе Q . Эта сила является равнодействующей касательных усилий, возникающих в поперечном сечении. Выясним, где проходит эта равнодействующая.

Для этого выберем в плоскости XOY произвольный полюс p . Элементарная касательная сила даст относительно выбранного полюса момент

$$dM = T p ds, \quad (2.17)$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из полюса p на направление силы $T ds$ (на направление касательной к средней линии контура).

Обозначим расстояние от равнодействующей до выбранного полюса через \bar{x} . Согласно теореме Вариньона (момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов сил составляющих относительно той же точки) получим:

$$Q_y \bar{x} = \int_l T \rho ds \quad \text{или} \quad \bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int_l T \rho ds . \quad (2.18)$$

Учитывая формулу (2.8), имеем:

$$\bar{x} = \frac{1}{I_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds . \quad (2.19)$$

Рассматривая изгиб относительно оси Y , аналогично получим

$$\bar{y} = \frac{1}{I_{ry}} \int_l S_{ry} \rho ds . \quad (2.20)$$

Из последних двух формул видно, что координаты \bar{x} и \bar{y} не зависят от внешней нагрузки, а зависят лишь от геометрии поперечного сечения и материала. Через точку с координатами \bar{x} и \bar{y} проходит равнодействующая касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении. Эта точка называется **центром изгиба открытого сечения**.

Итак, **центром изгиба открытого сечения, называется точка, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений. Линия, проходящая через центры изгиба всех сечений, называется осью изгиба конструкции. Она параллельна оси Z .**

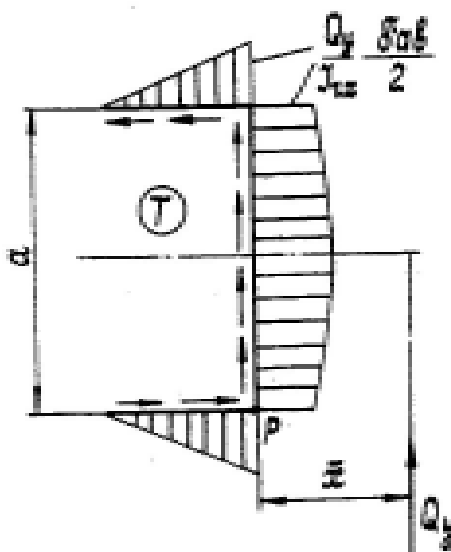


Рис. 2.11

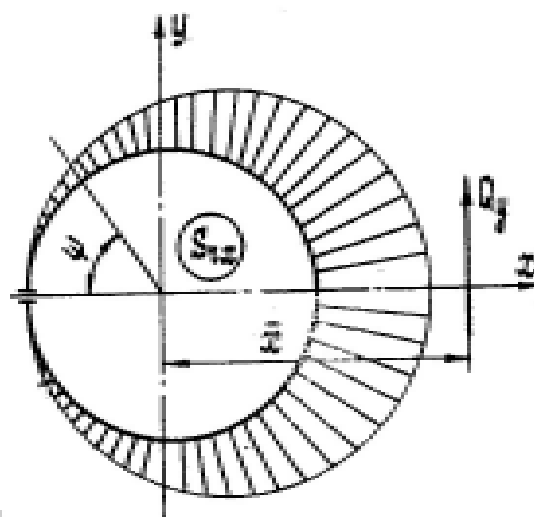


Рис. 2.12

Отсюда вытекает, что конструкции с открытым контуром поперечного сечения могут воспринимать только такие внешние нагрузки, которые проходят через ось изгиба. В противном случае внутренние силы не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку.

Следовательно, все выведенные ранее формулы для конструкций с открытым контуром сечения справедливы лишь в том случае, если внешние нагрузки проходят через ось изгиба.

Пример 1. Пусть требуется определить положение центра изгиба сечения, изображенного на рис. 1.4. Воспользуемся для расчета формулой (2.18), согласно которой

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int T \rho ds$$

Эпюра погонных касательных сил представлена на рис. 2.11. Если выбрать полюс в нижнем правом углу сечения, то момент относительно него дадут лишь касательные силы, действующие в верхней полке сечения. Плечо ρ здесь будет постоянным и равным высоте профиля a . Тогда

$$\bar{x} = \frac{a}{Q_y} \int_0^b T ds$$

Последний интеграл представляет собой равнодействующую касательных сил верхней полки или площадь эпюры T на рассматриваемом участке,

$$\int_0^b T ds = \frac{Q_y}{I_{xx}} \frac{\delta ab}{2} \frac{b}{2}$$

Отсюда, с учетом формулы (2.13)

$$\bar{x} = \frac{b^2 a^2 \delta}{4 I_{xx}} = \frac{b^2 a^2 \delta}{4 \frac{\delta a^2}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right)} = \frac{b}{2 \left(1 + \frac{a}{b} \right)} = \frac{b}{2 \left(1 + \frac{1}{6b} \right)}.$$

Так для контура с размерами $b = 20$ см, $a = 50$ см получается, что $\bar{x} = 7,04$ см, т.е. от полпса ρ нужно отложить вправо 7,04 см. Полученная точка будет являться точкой приложения внешней нагрузки.

Пример 2. Определим положение центра изгиба сечения, представленного на рис. 2.7. Воспользуемся для расчета формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{I_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds$$

За полюс выберем центр окружности (рис. 2.12). Тогда $\rho = R = const$. Статический момент изменяется по закону

$$S_{rx} = \delta R^2 (1 - \cos \psi).$$

Момент инерции $I_{rx} = \pi \delta R^3$.

Следовательно:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi \delta R^3} \int_0^{2\pi} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R R d\psi = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \psi) d\psi = 2R.$$

В рассмотренных примерах определяли одну из координат центра изгиба – координату \bar{x} . Координата \bar{y} определяется по аналогичным формулам.

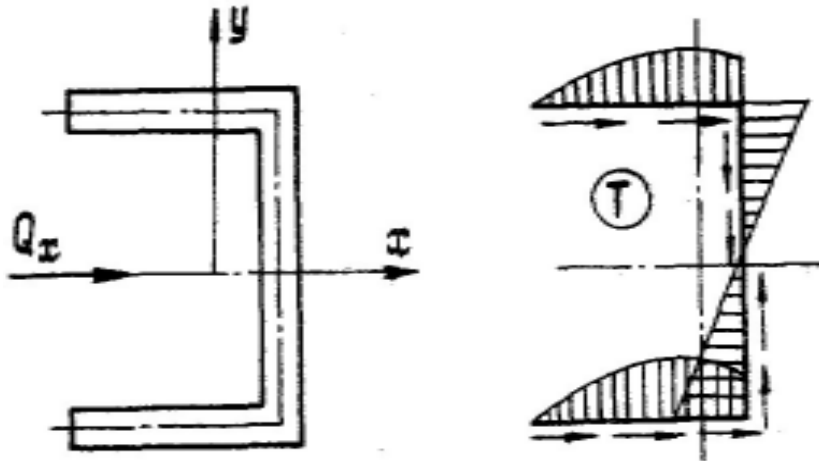


Рис. 2.13

Можно показать, что **если поперечное сечение конструкции имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси.**

На рис. 2.13 представлена эпюра погонных касательных сил для тонкостенной конструкции швеллерного типа при действии сил Q . Смена знака статического момента на оси симметрии свидетельствует о том, что поток касательных сил изменил свое направление. В результате, в симметричных точках поперечного сечения величины погонных касательных сил равны, а их направления – симметричны.

Для определения координаты \bar{y} центра изгиба удобнее полюс выбрать на оси симметрии. Тогда момент от внутренних сил верхней половины сечения уравновешивается моментом внутренних сил нижней половины:

$$Q_x \bar{y} = \int_l T p ds = 0$$

$\bar{y} = 0$, отсюда

т.е. центр изгиба лежит на оси симметрии сечения.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба будет находиться в точке пересечения этих осей, т.е. совпадет с центром тяжести поперечного сечения.

2.4. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с однозамкнутым контуром поперечного сечения

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с произвольным однозамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 2.14). Пусть требуется определить погонные касательные силы в точке β поперечного сечения. Полагаем, что нагрузка, приложенная к оболочке, вызывает изгиб относительно одной из главных осей инерции поперечного сечения, например относительно оси x .

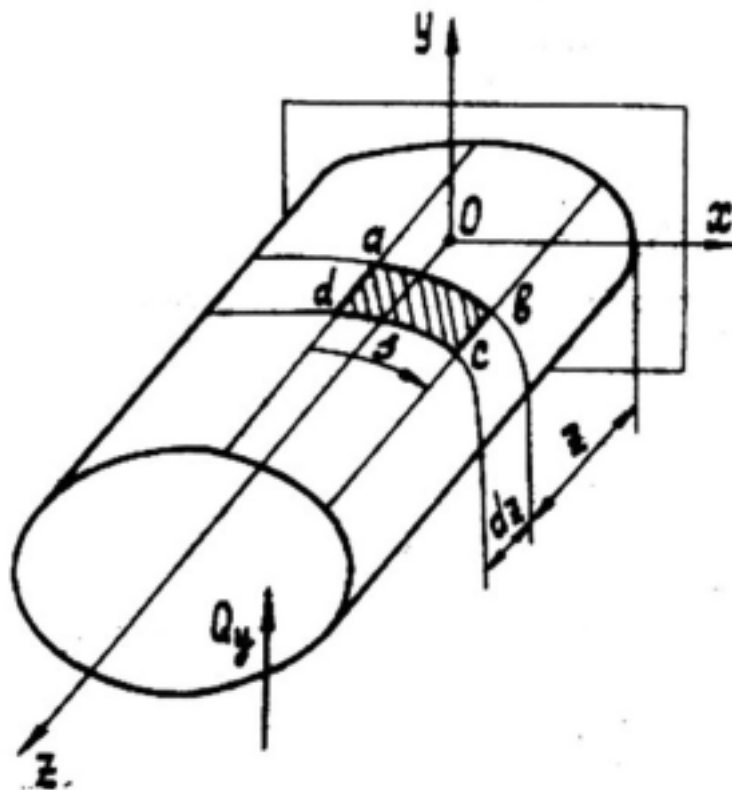


Рис. 2.14

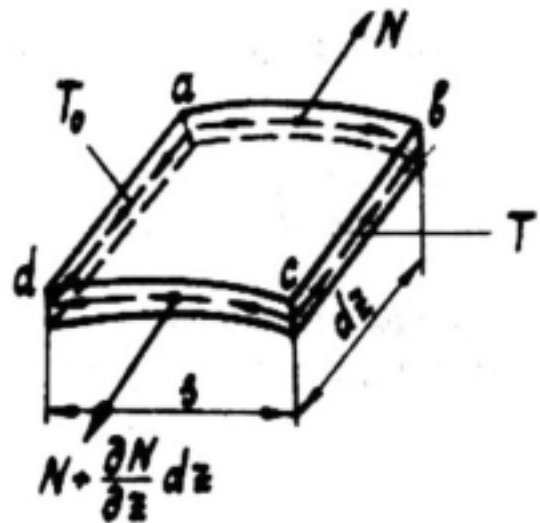
В сечении действует перерезывающая сила Q_y , параллельная главной оси y .

Выделим мысленно элемент конструкции четырьмя сечениями. Три из них проводятся также, как и в конструкциях

с открытым контуром: два сечения — перпендикулярно оси z на расстоянии dz друг от друга и одно — по образующей, проходящей через точку β . Четвертое сечение проводится по образующей, проходящей через произвольно выбранную точку a . Эта точка выбирается произвольно, но в дальнейшем считается фиксированной. От нее отсчитывается координата s . Пусть N и $N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$ равнодействующие нормальных напряжений, действующих в площадках $a\beta$ и cd (рис. 2.15). Разность этих усилий уравнивается

касательными напряжениями в продольных разрезах, проходящих через точки a и b .

Обозначим через T погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку b . В силу парности касательных напряжений погонная касательная сила в точке b поперечного сечения будет также T . Через T_0 обозначим погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку a . Поскольку точка



a в процессе расчета фиксируется, то сила T_0 — величина постоянная.

Рис. 2.15

Запишем уравнение равновесия элемента $abcd$, спроектировав все силы на ось z :

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz\right) - N - T dz + T_0 dz = 0,$$

откуда имеем

$$T = T_0 + \frac{\partial N}{\partial z} dz. \quad (2.21)$$

Как и для открытого контура

$$N = \int_0^s G \delta ds = \frac{M_z}{J_{zx}} S_{zx},$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{Q_y}{J_{zx}} S_{zx}. \quad (2.22)$$

Тогда, подставив (2.22) в (2.21), получим

$$T = T_0 + \frac{Q_y}{J_{zx}} S_{zx}. \quad (2.23)$$

Здесь S_{zx} — статический момент относительно оси z части ab приведенного сечения.

Сравним полученный результат с формулой (2.8) для определения погонных касательных сил в открытом контуре. Видим, что

второе слагаемое последней формулы представляет собой погонную касательную силу в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку a . Обозначим ее через \bar{T} :

$$\bar{T} = \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz}. \quad (2.24)$$

Тогда

$$T = T_0 + \bar{T}. \quad (2.25)$$

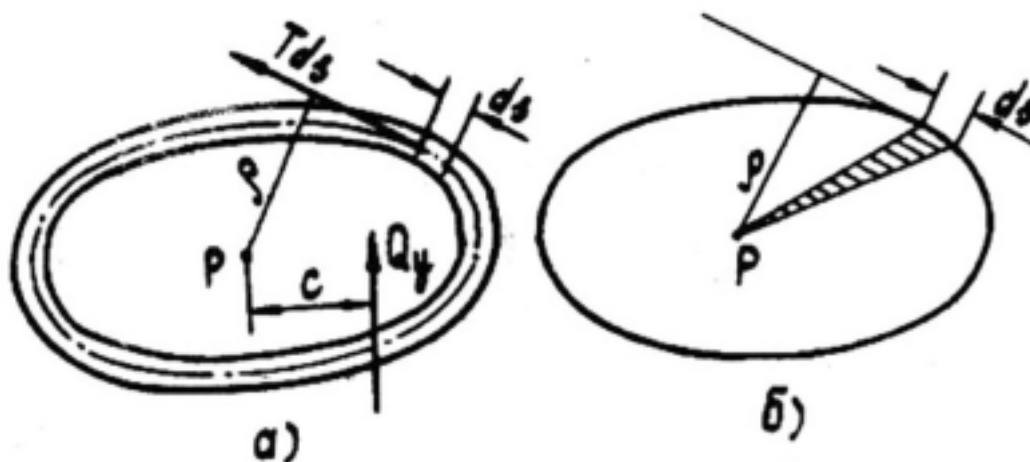


Рис. 2.16

Равнодействующая погонных касательных сил T равна перерезывающей силе в сечении Q_y . Момент равнодействующей относительно произвольно выбранного полюса должен быть равен сумме моментов элементарных касательных сил относительно того же полюса (рис. 2.16а):

$$Q_y c = \oint T \rho ds. \quad (2.26)$$

Здесь c — расстояние от полюса до линии действия силы Q_y , ρ — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на направление касательной к контуру.

Подставив в (2.26) значение усилия T (2.25), получим

$$Q_y c = \oint (T_0 + \bar{T}) \rho ds. \quad (2.27)$$

Поскольку касательное усилие в начале отсчета дуг T_0 - величина постоянная, имеем:

$$Q_{yc} = T_0 \oint \rho ds + \oint \bar{T} \rho ds.$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{Q_{yc} - \oint \bar{T} \rho ds}{\oint \rho ds}. \quad (2.28)$$

Интеграл $\oint \rho ds$ имеет простой геометрический смысл. Из рис. 2.166 видно, что произведение ρds представляет собой удвоенную площадь заштрихованного треугольника. Проинтегрировав эту величину по всему контуру, получим удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией контура. Обозначим эту удвоенную площадь через Ω :

$$\Omega = \oint \rho ds, \\ T_0 = \frac{Q_{yc} - \oint \bar{T} \rho ds}{\Omega}. \quad (2.29)$$

При расчетах по формуле (2.29) нужно учитывать знаки моментов. Условимся как для внешних нагрузок, так и для внутренних сил за положительные считать моменты, действующие против хода часовой стрелки, если смотреть против оси Z .

Если единственной внешней нагрузкой является крутящий момент, то сила $Q_{yc} = 0$, и мы приходим к известной из курса сопротивления материалов формуле для кручения тонкостенных труб:

$$T = \frac{M_z}{\Omega}. \quad (2.30)$$

Порядок расчета однозамкнутого контура сводится к следующему:

1. Выбираем точку в качестве начала отсчета дуг.
2. Определяем по формуле (2.24) величину погонных касательных сил \bar{T} как для открытого контура.
3. Выбираем в сечении полюс, относительно которого подсчитываем момент Q_{yc} касательных сил \bar{T} .
4. Вычисляем момент Q_{yc} внешней нагрузки относительно произвольно выбранного полюса.
5. По формуле (2.29) находим касательное усилие T_0 в начальной точке.
6. Вычисляем окончательные значения погонных касательных сил во всех точках поперечного сечения по формуле (2.25).

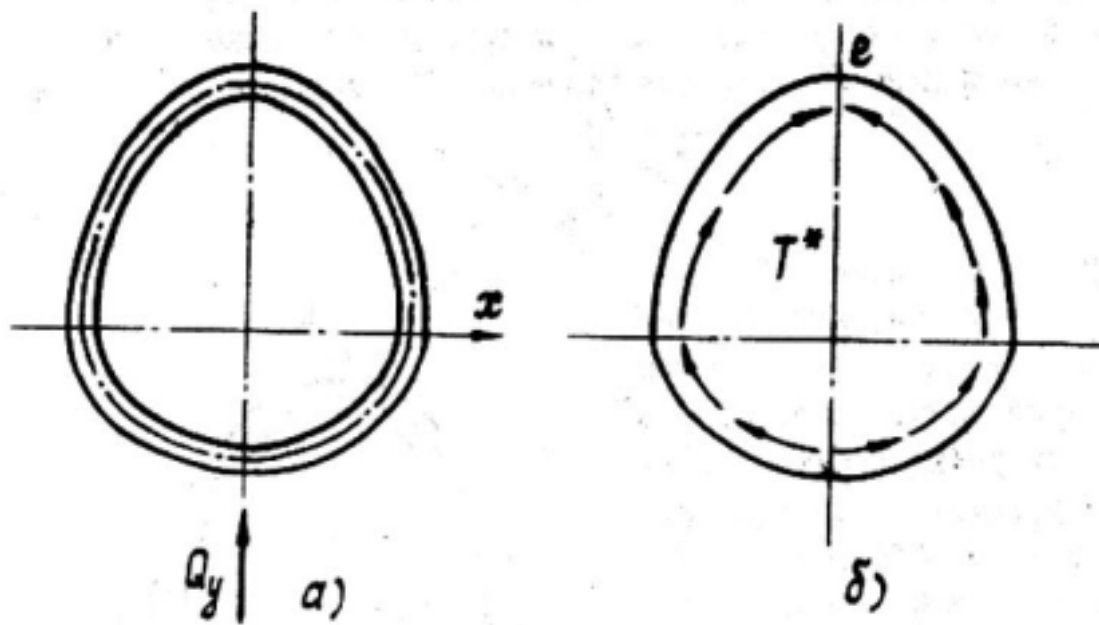


Рис. 2.17

Рассмотрим один частный случай – тонкостенную конструкцию, имеющую плоскость симметрии. Пусть, кроме того, внешняя нагрузка лежит в этой плоскости (рис. 2.17).

Выберем в качестве начала отсчета дуг точку e на оси симметрии (рис. 2.17б). Тогда в симметричных точках поперечного сечения погонные касательные силы \dot{T} будут равны по величине, а их направления – симметричны. Если теперь выбрать полюс на оси симметрии сечения, то

$$\oint \dot{T} \rho ds = 0 \quad \text{и} \quad Q_y c = 0.$$

Отсюда $T_0 = 0$, и получаем

$$T = \dot{T} = \frac{Q_y}{y_{xz}} S_{xz}. \quad (2.31)$$

Итак, если начальную точку выбрать на оси симметрии, то в рассматриваемом случае расчетная формула упрощается.

Если внешняя нагрузка параллельна плоскости симметрии, но не лежит в ней (рис. 2.18), то имеем

$$T = \frac{Q_y c}{R} + \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz}. \quad (2.32)$$

Мы рассматривали изгиб конструкции относительно оси x . Если же в сечении действует перерезывающая сила Q_x , то определение погонных касательных сил проводится также по формуле (2.25), но усилие T следует вычислять по формуле

$$\dot{T} = \frac{Q_x}{J_{xy}} S_{xy}. \quad (2.33)$$

В тонкостенной конструкции с замкнутым контуром сечения могут развиваться такие внутренние силы, которые в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку, приложенную произвольным образом. Эти внутренние силы однозначно определяются из уравнений статики. Следовательно, системы с однозамкнутым контуром поперечного сечения статически определимы и геометрически неизменяемы.

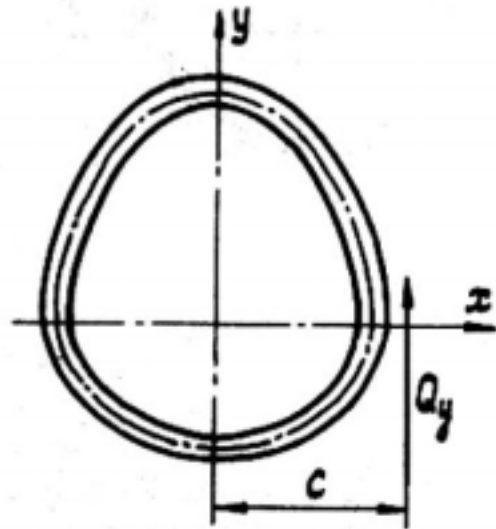


Рис. 2.18

2.5. Пример расчета касательных напряжений в однозамкнутом контуре

Определить величину погонных касательных сил в сечении, представленном на рис. 2.19а. Конструкция загружена вертикальной нагрузкой Q_y , действующей на расстоянии $0,5R$ от вертикальной стенки.

При вычислении момента инерции имеем в виду, что сечение состоит из полуокружности и прямоугольной стенки:

$$J_{xz} = \frac{\pi \delta R^3}{2} + \frac{8 \delta R^3}{12} = 2,24 \delta R^3.$$

Если выбрать начало отсчета дуг на оси симметрии сечения (точка I), то закон изменения погонных касательных сил \bar{T} на криволинейном участке будет таким же, как в примере 2 (2.16). На вертикальной стенке погонные касательные силы изменяются по закону квадратной параболы. Характерные ординаты эпюры \bar{T} приведены на рис. 2.19б.

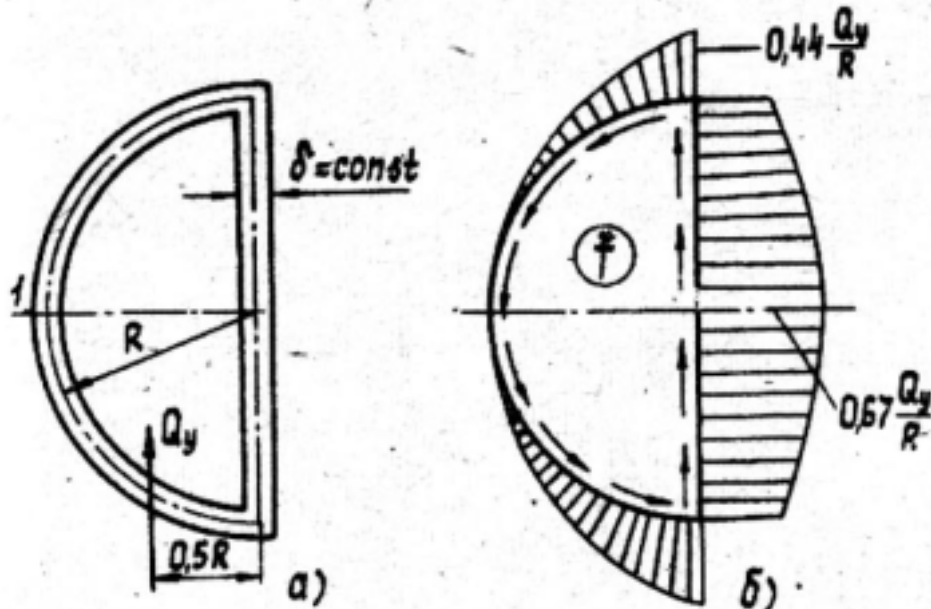


Рис. 2.19

Для определения усилия T_0 выберем полюс в центре окружности. Тогда момент внутренних сил \bar{T} будет равен

$$\oint \bar{T} \rho ds = 2 \cdot \frac{Q_y}{y_{xz}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R \cdot R d\psi =$$

$$= 2 \frac{Q_y \delta R^4}{2,24 \delta R^3} [\psi - \sin \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,51 Q_y R.$$

Момент внешней нагрузки относительно выбранного полюса с учетом знака

$$Q_y c = Q_y \frac{R}{2}.$$

Удвоенная площадь фигуры, ограниченной средней линией контура:

$$\Omega = \pi R^2.$$

Отсюда:

$$T_0 = \frac{-0,5Q_y R - 0,51Q_y R}{\pi R^2} = -0,32 \frac{Q_y}{R}$$

$$T = T_0 + \overset{*}{T} = -0,32 \frac{Q_y}{R} + \overset{*}{T}.$$

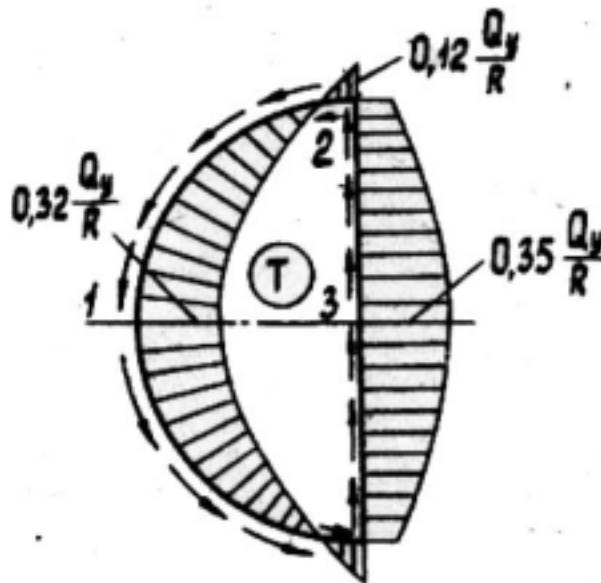


Рис. 2.20

Вид эпюры T представлен на рис. 2.20. В характерных точках имеем:

$$T_1 = -0,32 \frac{Q_y}{R},$$

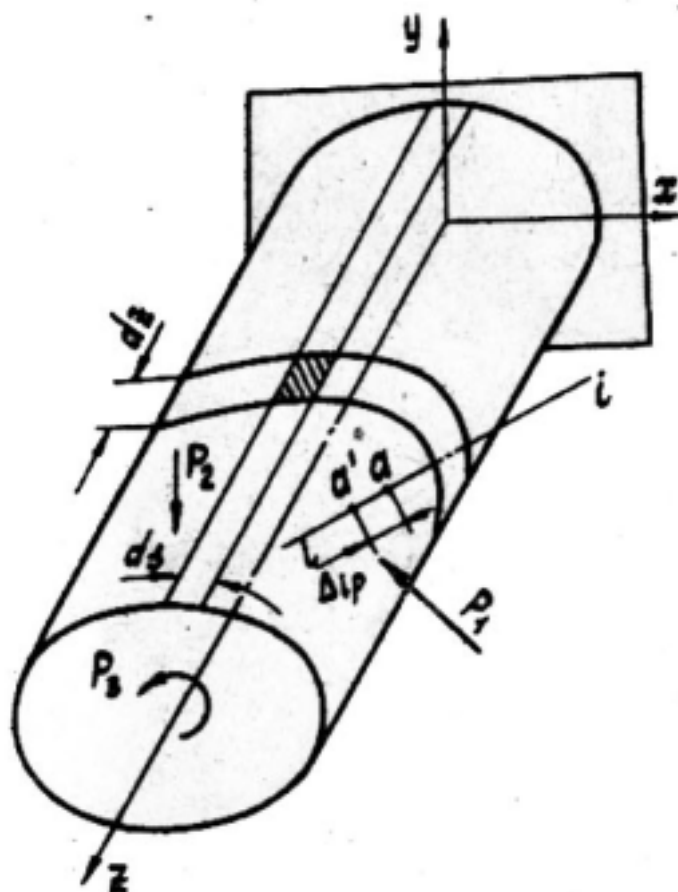
$$T_2 = -0,32 \frac{Q_y}{R} + 0,44 \frac{Q_y}{R} = 0,12 \frac{Q_y}{R},$$

$$T_3 = -0,32 \frac{Q_y}{R} + 0,67 \frac{Q_y}{R} = 0,35 \frac{Q_y}{R}.$$

При значении $Q_y = 1,10^5 \text{ Н}$, $R = 50 \text{ см}$, максимальное значение $T = 700 \text{ Н/см}$ будет в точке 3 контура.

2.6. Упругие перемещения тонкостенных конструкций

Имеется тонкостенная конструкция, нагруженная системой сил P_1, P_2, P_3 и т.д.



В дальнейшем это состояние конструкции будем называть системой "P" (рис. 2.21). Пусть требуется определить перемещение точки a системы "P" в направлении $i-i$, то есть проекцию полного перемещения точки a на направление $i-i$. (Точка a и направление $i-i$ взяты произвольно).

Введем в рассмотрение еще одно состояние конструкции, где единственной внешней нагрузкой является единичная сила, приложенная в точке a в направлении искомого перемещения. Это состояние конструкции

Рис. 2.21

будем называть единичной системой "I" (рис. 2.22).

Воспользуемся принципом возможных перемещений, который для упругой системы можно сформулировать следующим образом. Если упругая система находится в равновесии под действием внешних нагрузок, то работа внешних сил $\delta'A$ на возможных перемещениях будет равна вариации потенциальной энергии системы $\delta'U$:

$$\delta'A = \delta'U. \quad (2.34)$$

Возможными перемещениями в механике называют любые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент связями системы.

Применим принцип возможных перемещений к единичной системе.

За возможные перемещения системы "i" примем действительные перемещения системы "p", умноженные на весьма малый коэффициент β . Тогда точка a системы "i" будет иметь перемещение

$$\beta \Delta i p. \quad (2.35)$$

Напомним, что в то время, когда системе сообщаются возможные перемещения, величины и направления внешних и внутренних сил остаются неизменными.

Работа внешних сил системы "i" на возможных перемещениях определится выражением

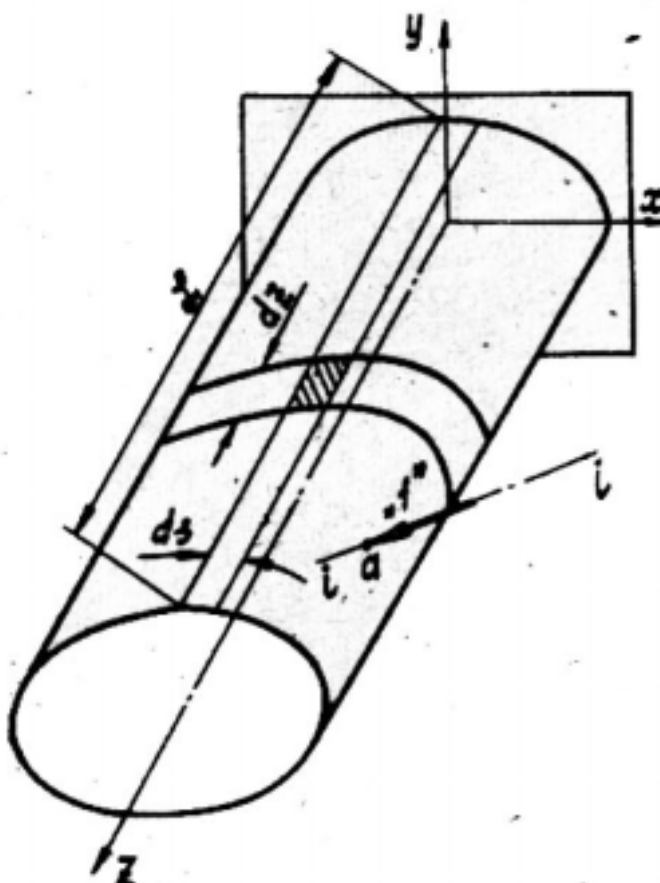


Рис. 2.22

$$\delta' A = 1 \cdot \beta \Delta i p. \quad (2.36)$$

Для вычисления изменения энергии деформации единичной системы воспользуемся следующей зависимостью [2]:

$$\delta' U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\phi} (\bar{\sigma} \delta' \bar{\epsilon}_{zz} + \bar{\tau} \delta' \bar{\epsilon}_{zs}) dV, \quad (2.37)$$

где $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ - нормальные и касательные напряжения, возникающие от единичной нагрузки; $\delta' \bar{\epsilon}_{zz}$, $\delta' \bar{\epsilon}_{zs}$ - вариации деформаций, вызванные возможными перемещениями единичной системы, равные в соответствии со сказанным выше

$$\delta' \bar{\epsilon}_{zz} = \beta \epsilon_{zz}, \quad \delta' \bar{\epsilon}_{zs} = \beta \epsilon_{zs}; \quad (2.38)$$

ϵ_{zz} , ϵ_{zs} - деформации в системе "p", dV - элемент объема.

Действительные деформации исходной системы связаны с напряжениями $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ законом Гука.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\bar{\sigma}}{E}, \quad \varepsilon_{zs} = \frac{\bar{\tau}}{G}. \quad (2.39)$$

Подставим (2.38) и (2.39) в уравнение (2.37):

$$\delta' u = \int_{\xi} \phi \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\bar{\sigma} \beta \frac{G}{E} + \bar{\tau} \beta \frac{\tau}{G}) dV. \quad (2.40)$$

Приравняем, согласно (2.34), работу внешних сил (2.36) вариации потенциальной энергии системы (2.40):

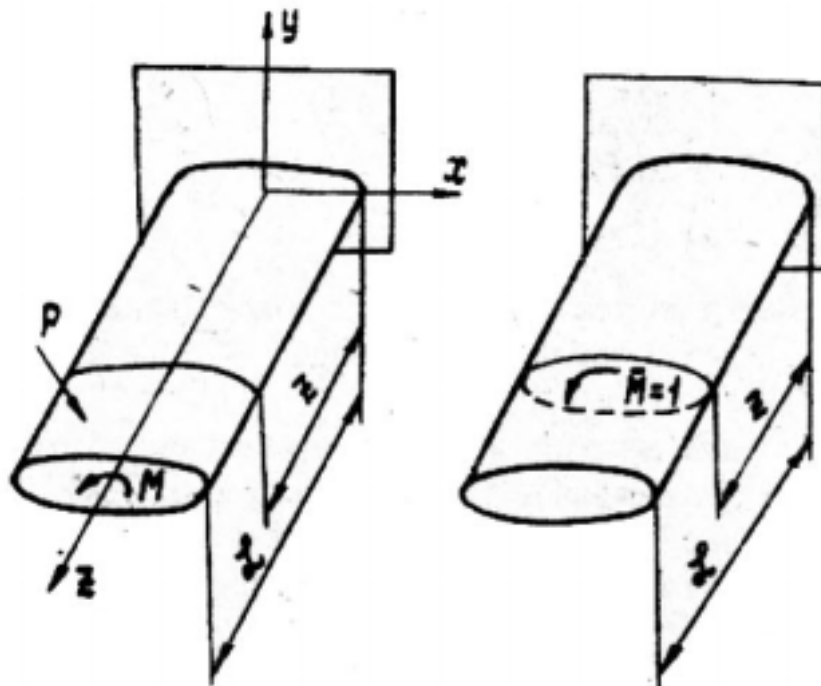
$$\beta \Delta i_p = \beta \int_{\xi} \phi \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\bar{\sigma} \frac{G}{E} + \bar{\tau} \frac{\tau}{G}) dV.$$

После сокращения на ненулевой весьма малый множитель β получим:

$$\Delta i_p = \int_{\xi} \phi \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\frac{\bar{\sigma} G}{E} + \frac{\bar{\tau} \tau}{G}) dV. \quad (2.41)$$

И, наконец, интегрируя по толщине оболочки, имеем:

$$\Delta i_p = \int_{\xi} \phi (\frac{\bar{\sigma} G \delta}{E} + \frac{\bar{\tau} \tau \delta}{G}) dz ds. \quad (2.42)$$



Наконец, если в последнем равенстве перейти к погонным касательным усилиям $T = \tau \delta$ и $\bar{T} = \bar{\tau} \delta$, то формула для расчета упругих перемещений примет следующий вид:

$$\Delta_{i\rho} = \int \oint \left(\frac{\bar{\sigma} G \delta}{E} + \frac{\bar{T} T}{G \delta} \right) dz ds. \quad (2.43)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть требуется определить угол поворота сечения оболочки, находящегося на расстоянии z от заделки (рис. 2.23).

Для этого к конструкции в интересующем нас сечении прикладываем крутящий момент, равный единице. В этом случае нормальные напряжения $\bar{\sigma}$ будут равны нулю и первое слагаемое в (2.43) исчезает. Погонная касательная сила на участке длиной z равна

$$\bar{T} = \frac{1}{z},$$

а за пределом этого участка равна нулю. Теперь для угла поворота сечения получим следующее выражение:

$$\theta = \frac{1}{z} \int \oint \frac{T}{G \delta} dz ds. \quad (2.44)$$

Относительный (погонный) угол закручивания оболочки определим путем дифференцирования выражения (2.44) по z :

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{z} \oint \frac{T ds}{G \delta}. \quad (2.45)$$

2.7. Центр изгиба тонкостенных конструкций с однозамкнутым сечением

При произвольной внешней нагрузке перемещение поперечного сечения замкнутой тонкостенной конструкции может быть представлено в виде линейного смещения какой-либо точки и поворота относительно этой точки (рис. 2.24).

Оказывается, что для любого сечения можно найти такую точку, проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечений, а только изгиб конструкции без ее закручивания. Такая деформация системы называется простым изгибом.

Найдем положение этой точки для заданной конструкции.

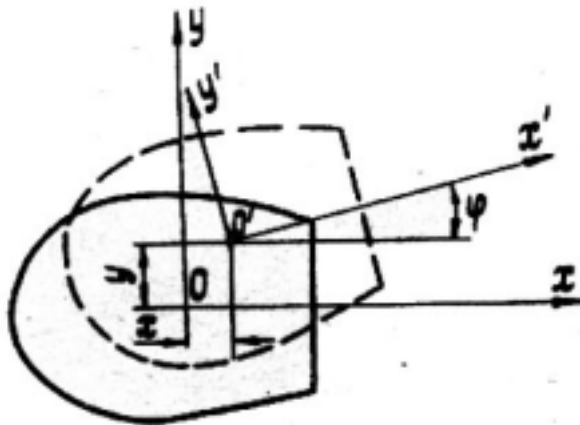


Рис. 2.24

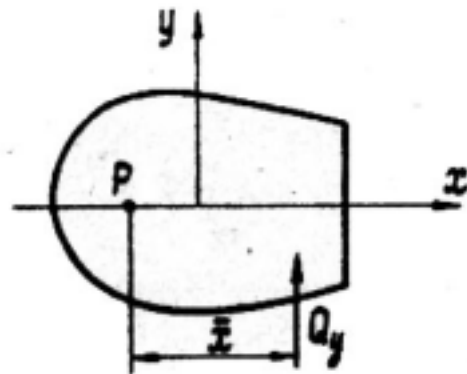


Рис. 2.25

Рассмотрим действие нагрузки, перпендикулярной оси x (рис. 2.25). Поскольку контур замкнутый, то касательные усилия в нем определяются согласно (2.24), (2.25) и (2.29). Поэтому можно записать:

$$T = \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz} + \frac{Q_y \bar{x} - \oint T^* \rho ds}{\Omega}. \quad (2.46)$$

Здесь \bar{x} — расстояние от произвольного полюса до линии действия силы Q_y .

Преобразуем последнее выражение:

$$T = \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz} + \frac{Q_y \bar{x} - \oint \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz} \rho ds}{\Omega}$$

или

$$T = Q_y \left(\frac{S_{xz}}{J_{xz}} + \frac{\bar{x}}{\Omega} - \frac{\oint \frac{S_{xz}}{J_{xz}} \rho ds}{\Omega} \right). \quad (2.47)$$

Подставим в (2.45) выражение (2.47) и результат приравняем нулю:

$$\frac{Q_y}{\Omega} \left[\oint \frac{S_{xz} ds}{J_{xz} G \delta} + \frac{\bar{x}}{\Omega} \oint \frac{ds}{G \delta} - \frac{1}{\Omega} \oint \frac{S_{xz}}{J_{xz}} \rho ds \oint \frac{ds}{G \delta} \right] = 0. \quad (2.48)$$

Равенство (2.48) возможно, если выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю:

$$\oint \frac{S_{rx} ds}{J_{rx} G \delta} + \frac{\bar{x}}{\Omega} \oint \frac{ds}{G \delta} - \frac{1}{\Omega} \oint \frac{S_{rx}}{J_{rx}} \rho ds \oint \frac{ds}{G \delta} = 0. \quad (2.49)$$

Отсюда находим положение линии действия силы Q_y , при котором будет иметь место простой изгиб конструкции:

$$\bar{x} = \frac{1}{J_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds - \frac{\Omega}{J_{rx}} \frac{\oint \frac{S_{rx} ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}}. \quad (2.50)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для случая нагружения силой Q_x , получим вторую координату искомой точки:

$$\bar{y} = \frac{1}{J_{ry}} \oint S_{ry} \rho ds - \frac{\Omega}{J_{ry}} \frac{\oint \frac{S_{ry} ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}}. \quad (2.51)$$

Итак, в поперечном сечении существует такая точка с координатами \bar{x} и \bar{y} , проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечения. Эта точка называется центром изгиба однозамкнутого контура.

Линия, проходящая через центры изгиба всех сечений, параллельна оси \bar{z} и называется осью изгиба однозамкнутой тонкостенной конструкции.

Между осью изгиба тонкостенных конструкций с открытым и замкнутым поперечным сечениями имеется принципиальное различие.

Для открытого сечения ось изгиба является линией обязательного приложения внешней нагрузки. Нагрузки, не проходящие через ось изгиба, не могут быть уравновешены соответствующими внутренними силами в поперечном сечении.

Для конструкций с замкнутым сечением ось изгиба является линией действия внешней нагрузки, не вызывающей поворотов сечений, т.е. обеспечивающей простой изгиб системы. Нагрузки же, не проходящие через ось изгиба, вызывают поворот сечений, но могут успешно восприниматься системой.

В. РАБОТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С МНОГОЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях с многозамкнутым контуром поперечного сечения могут быть найдены, как отмечалось в I.2, по формуле (I.16), согласно принятому закону плоского распределения относительных деформаций.

Задача определения касательных напряжений в многозамкнутых контурах оказывается более сложной. Переход от разомкнутой конструкции к замкнутой можно рассматривать как замыкание по образующей - наложение одной связи. Так как однозамкнутый контур статически определим, то n -замкнутый контур будет в $n-1$ раз статически неопределим. Раскрытие статической неопределимости может быть выполнено общими методами строительной механики [3].

Мы рассмотрим расчет многозамкнутых контуров при работе их в условиях простого изгиба и свободного кручения. Простой изгиб конструкции имеет место при прохождении внешней нагрузки через ось изгиба.

3.1. Касательные напряжения при простом изгибе тонкостенных конструкций с многозамкнутым контуром поперечного сечения

При простом изгибе поперечное сечение системы не поворачивается относительно продольной оси Z , а лишь получает поступательное перемещение вдоль осей X и Y .

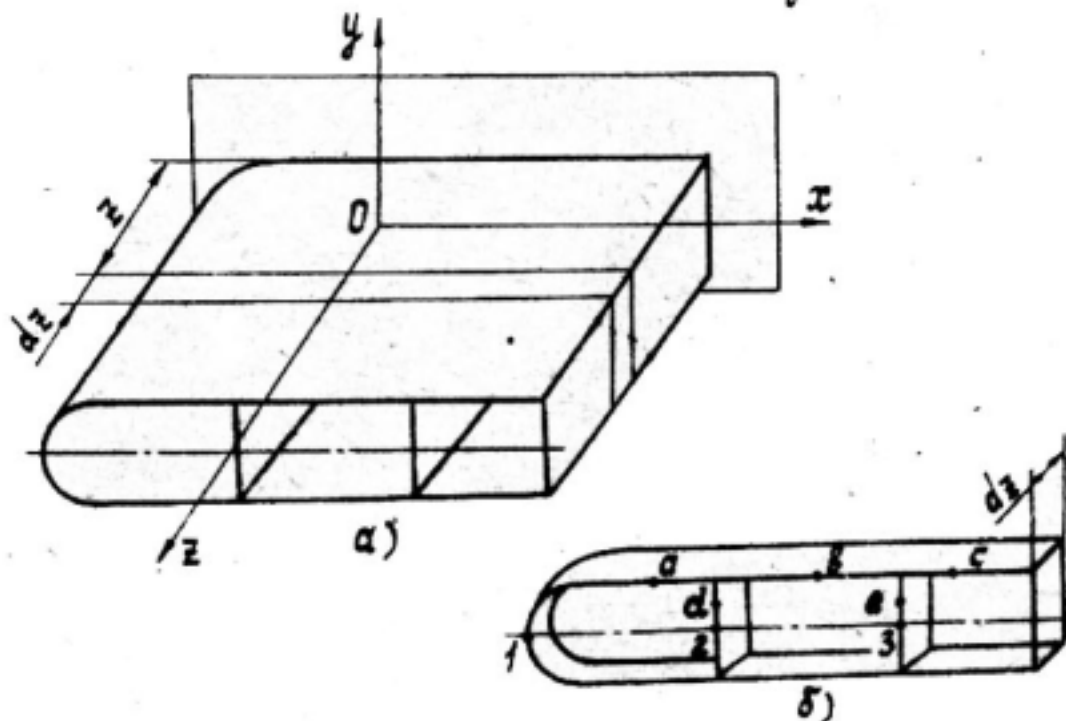


Рис. 3.1

Рассмотрим тонкостенную оболочку с произвольным трехзамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 3.1а). Будем считать, что конструкция работает в условиях простого изгиба.

Отсутствие поворота сечения можно записать в виде равенства нулю углов закручивания каждого из контуров:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \quad (3.1)$$

Пусть требуется найти погонную касательную силу T_a в точке a . Выберем произвольную точку I в пределах первого контура. В сечении вдоль образующей, проходящей через эту точку, будет действовать погонная касательная сила. Обозначим ее через X_1 .

Проведем сечения плоскостями, перпендикулярными продольной оси системы на расстояниях z и $z + dz$ от начала координат (рис. 3.1б). Затем проведем еще два сечения вдоль образующих, проходящих через точки I и a , и рассмотрим равновесие выделенного таким образом элемента конструкции.

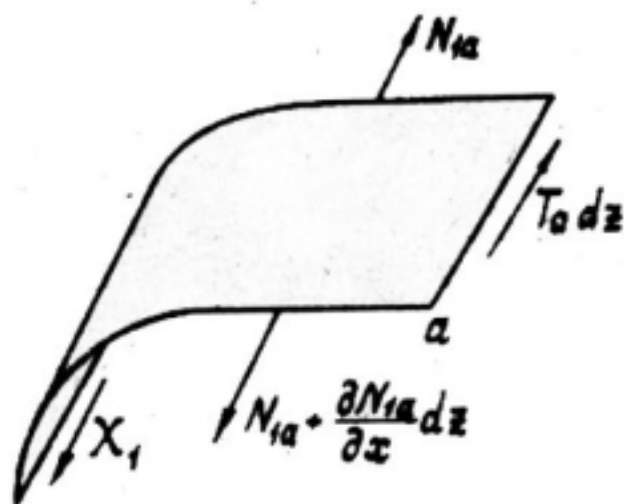


Рис. 3.2

Обозначим равнодействующую нормальных напряжений на задней грани отсеченной части через N_{1a} . Тогда на передней грани будет действовать равнодействующая, равная $N_{1a} + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z} dz$ (рис. 3.2). Равновесие отсеченной части возможно лишь тогда, когда в продольных сечениях действуют касательные напряжения. Спроектируем все силы на ось z :

$$(N_{1a} + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z} dz) - N_{1a} + X_1 dz - T_a dz = 0.$$

Отсюда

$$T_a = X_1 + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z}.$$

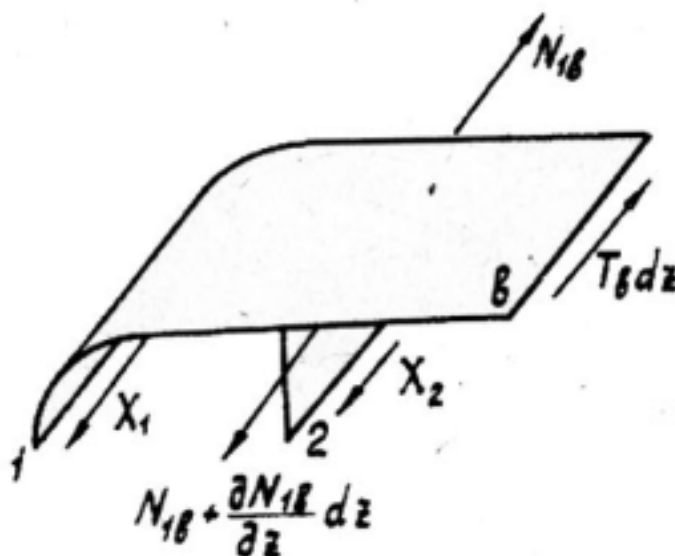
Согласно формулам (2.22)-(2.24)

$$\frac{\partial N_{1a}}{\partial z} = \frac{Q_y}{J_{zx}} S_{zx} = \overset{*}{T},$$

где $\overset{*}{T}$ - погонная касательная сила в точке a в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку 1. Итак,

$$T_a = X_1 + \overset{*}{T}. \quad (3.2)$$

Найдем далее погонную касательную силу T_b в точке b .



Выберем произвольную точку 2 в пределах второго контура. Через X_2 обозначим касательную силу, действующую вдоль образующей, проходящей через эту точку. Выделим часть конструкции, проведя продольные сечения вдоль образующих, проходящих через точки 1, 2, b и рассмотрим как ранее равновесие отсеченной части (рис. 3.3). Равно-

Рис. 3.3

действующую нормальных напряжений, действующих по передней грани, обозначим N_{1b} . Если спроектировать все силы на ось z , то можно получить

$$(N_{1b} + \frac{\partial N_{1b}}{\partial z} dz) - N_{1b} + X_1 dz + X_2 dz - T_b dz = 0$$

или

$$T_b = X_1 + X_2 + \frac{\partial N_{1b}}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Здесь $\frac{\partial N_{1b}}{\partial z} = \overset{*}{T}$ - погонная касательная сила в точке b в предположении, что конструкция разомкнута по образующим, проходящим через точки 1 и 2.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что зна-

чение погонной касательной силы в точке "с" третьего контура будет равно

$$T_c = X_1 + X_2 + X_3 + \bar{T}^* \quad (3.4)$$

Здесь X_3 - касательная сила вдоль образующей, проходящей через точку 3, \bar{T}^* - касательная сила в точке "с" в предположении, что конструкция разомкнута по образующим, проходящим через точки 1, 2 и 3.

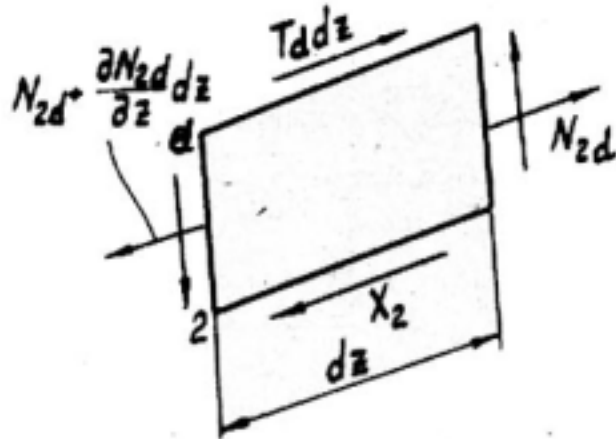


Рис. 3.4

Чтобы рассчитать усилия на промежуточных стенках, возьмем, например, на первой

из стенок точку d (рис. 3.1) и выделим элемент стенки двумя сечениями, проходящими через точки 2 и d . Рассмотрим равновесие этой части стенки. Спроектируем все силы на ось z (рис. 3.4):

$$\begin{aligned} (N_{2d} + \frac{\partial N_{2d}}{\partial z} dz) - N_{2d} - T_d dz + X_2 dz &= 0, \\ T_d &= X_2 + \frac{\partial N_{2d}}{\partial z} dz = X_2 + \bar{T}_d^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично

$$T_e = X_3 + \bar{T}_e^* \quad (3.6)$$

Запишем выражения (3.2)-(3.6) в виде одной формулы. Для этого введем три вспомогательные единичные функции \bar{T}_1 , \bar{T}_2 , \bar{T}_3 (рис. 3.5). Тогда искомые выражения можно будет представить в следующем виде:

$$T = \bar{T}^* + \bar{T}_1 X_1 + \bar{T}_2 X_2 + \bar{T}_3 X_3 \quad (3.7)$$

На рис. 3.5 условно показаны направления усилий X_1 , X_2 и X_3 .

Вспомним, что угол закручивания каждого из контуров можно записать по формуле

$$\alpha_i = \frac{1}{\Omega_i} \oint_{(i)} \frac{T}{G\delta} ds, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

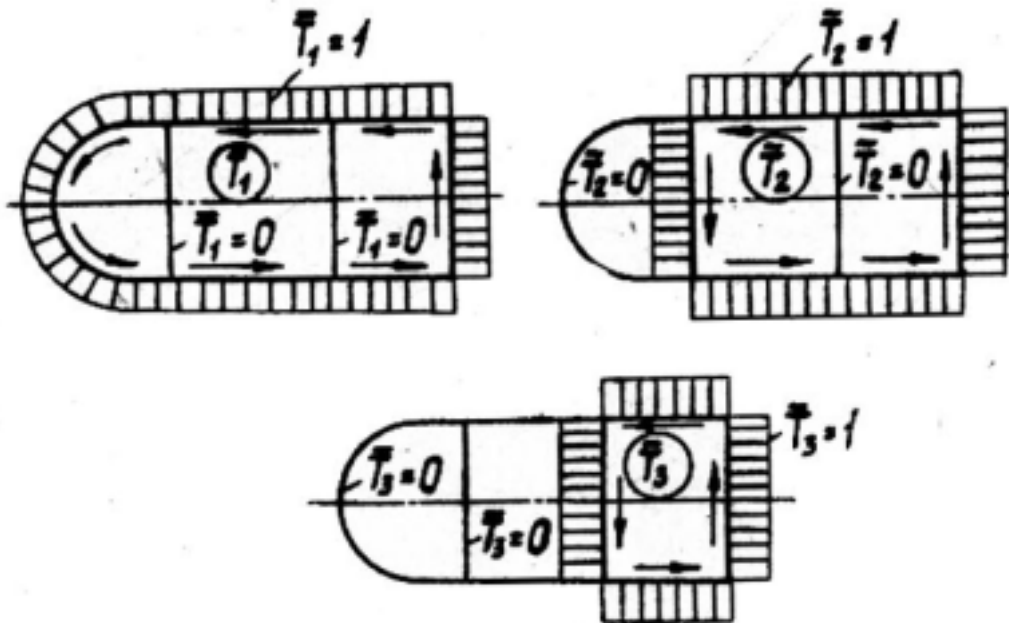


Рис. 3.5

Это равенство с учетом условия (3.I) представим таким образом:

$$\alpha_i = \oint \frac{T \bar{T}_i}{G\delta} ds = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Подставив значение усилия T (3.7) в (3.9), получим

$$\oint \frac{\bar{T}_i}{G\delta} (\bar{T} + \bar{T}_1 \chi_1 + \bar{T}_2 \chi_2 + \bar{T}_3 \chi_3) ds = 0. \quad (3.10)$$

Поскольку χ_1, χ_2, χ_3 постоянны, то их можно вынести за знак интеграла.

Тогда

$$\oint \frac{\bar{T} \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_1 \oint \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_2 \oint \frac{\bar{T}_2 \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_3 \oint \frac{\bar{T}_3 \bar{T}_i}{G\delta} ds = 0, \quad (3.11)$$

$i = 1, 2, 3$

Таким образом, уравнений запишем столько, сколько неиз-

вестных, и каждое из них будет выражать условие равенства нулю угла закручивания i -го контура.

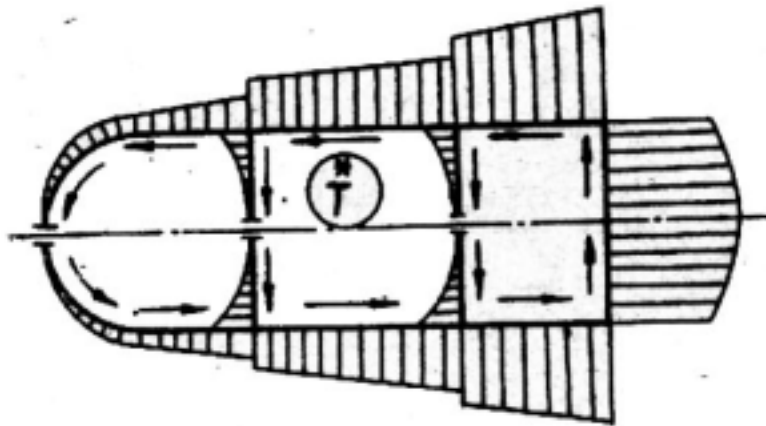


Рис. 3.6

Для сокращения записи уравнение (3.11) можно представить в виде

$$\Delta_{i0} + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \delta_{i3} X_3 = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i0} &= \oint \frac{\bar{T} \bar{T}_i}{G \delta} ds, & \delta_{i1} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_1}{G \delta} ds, \\ \delta_{i2} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_2}{G \delta} ds, & \delta_{i3} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_3}{G \delta} ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Коэффициенты (3.13) подсчитываются путем перемножения эпюр \bar{T} (рис. 3.6) и \bar{T}_i (рис. 3.5).

После решения системы уравнений (3.12) относительно неизвестных X_1 , X_2 и X_3 можно найти значение касательной силы T по формуле (3.7) в любой точке сечения.

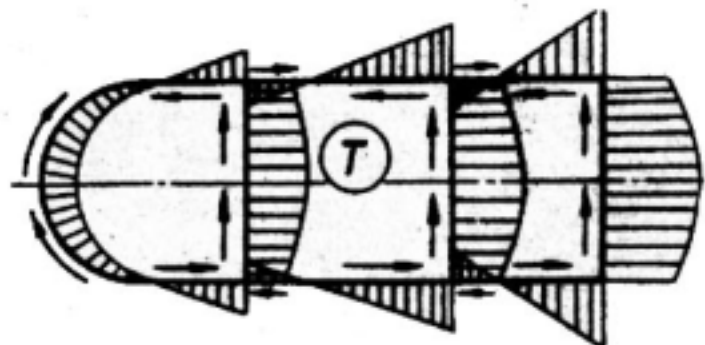


Рис. 3.7

Примерный вид эпюры погонных касательных сил при простом изгибе многозамкнутого контура приведен на рис. 3.7.

Выбирая произвольно точку-полос, находят положение центра изгиба по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \oint T \rho ds.$$

Затем определяют относительно оси изгиба крутящий момент.

3.2. Касательные напряжения при свободном кручении многозамкнутых конструкций

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с трехзамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 3.8а), нагруженную крутящим

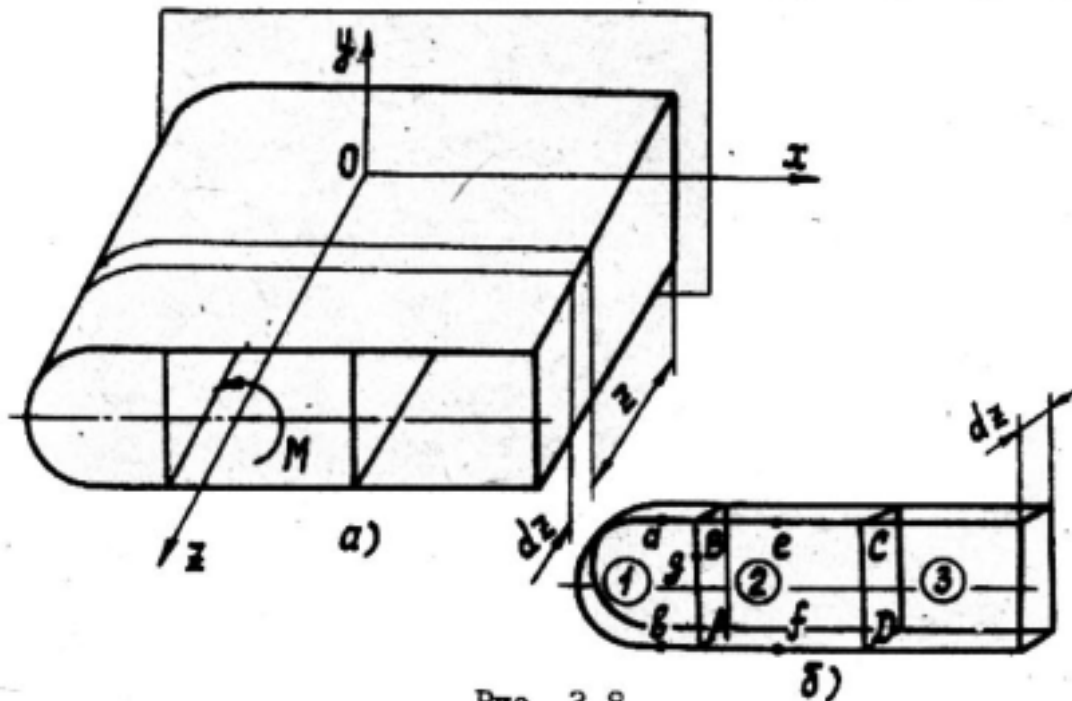


Рис. 3.8

моментом. Используя уравнения равновесия, выясним, как распределяются по контурам погонные касательные силы. Для этого мысленно проведем сечения на расстоянии z и $z + dz$ от начала координат (рис. 3.8б), а затем несколько продольных сечений через выбранные точки. Возьмем вначале две произвольные точки a и b в пределах первого контура. Рассмотрим равновесие выделенной части контура (рис. 3.9). Спроектировав все усилия на ось z , получим

$$T_b dz - T_a dz = 0, \quad T_a = T_b = T_1. \quad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что в первом контуре действует постоянная

погонная касательная сила T_1 . .

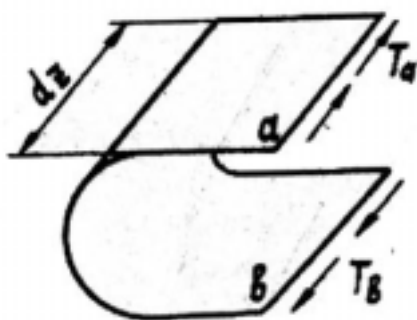


Рис. 3.9

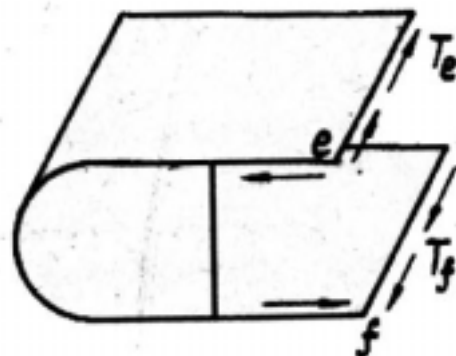


Рис. 3.10

Проведем два продольных сечения через e точки f и (рис. 3.10). Из условия равновесия отсеченной части получим

$$T_e dz - T_f dz = 0, \quad T_e = T_f = T_2. \quad (3.15)$$

То есть и во втором контуре действует постоянный по величине поток касательных сил T_2 .

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что и в третьем контуре погонная касательная сила постоянна и равна T_3 (рис. 3.11).

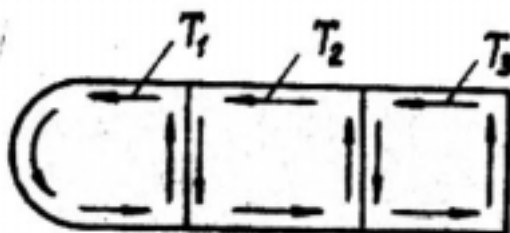


Рис. 3.11

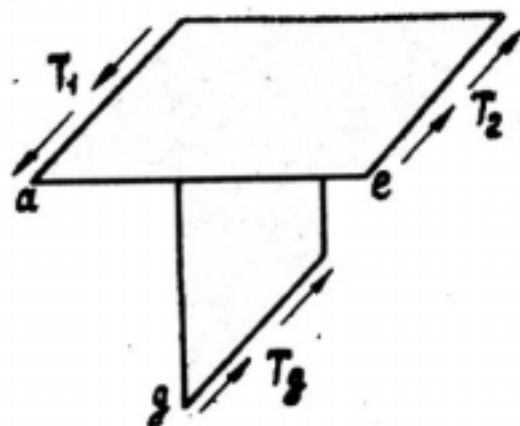


Рис. 3.12

Выясним, чему равны касательные силы на промежуточных стенках. Возьмем точку g на стенке между первым и вторым

контурами. Проведем сечения через точки a , g и e (рис. 3.8) и рассмотрим равновесие выделенной части конструкции. Спроектировав все силы на ось \bar{z} , получим (рис. 3.12):

$$T_1 d\bar{z} - T_2 d\bar{z} - T_3 d\bar{z} = 0, \quad T_3 = T_{1-2} = T_1 - T_2. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) видно, что в промежуточной стенке касательная сила равна разности усилий, действующих в двух смежных контурах.

Аналогично можно показать, что и в промежуточной стенке между вторым и третьим контурами касательная сила T_{2-3} будет равна

$$T_{2-3} = T_2 - T_3. \quad (3.17)$$

Итак, поток внутренних касательных сил в трехзамкнутом контуре может быть представлен в виде трех замкнутых потоков касательных T_1 , T_2 , T_3 сил по контурам. Найдем эти силы.

Воспользуемся условием совместности деформаций, записав его в виде равенства относительных углов закручивания контуров:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha. \quad (3.18)$$

Здесь α - угол поворота всего сечения.

Запишем выражение для углов закручивания каждого из контуров, используя формулу

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{G \delta}. \quad (3.19)$$

Тогда для угла закручивания второго контура будем иметь (рис. 3.36)

$$\begin{aligned} \alpha \Omega_2 &= (T_2 - T_1) \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \int_B^C \frac{ds}{G \delta} + (T_2 - T_3) \int_C^D \frac{ds}{G \delta} + T_2 \int_D^A \frac{ds}{G \delta} \\ \text{или} \\ \alpha \Omega_2 &= -T_1 \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \left(\int_A^B \frac{ds}{G \delta} + \int_B^C \frac{ds}{G \delta} + \int_C^D \frac{ds}{G \delta} + \int_D^A \frac{ds}{G \delta} \right) - T_3 \int_C^D \frac{ds}{G \delta}, \\ \text{наконец} \\ \alpha \Omega_2 &= -T_1 \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \oint \frac{ds}{G \delta} - T_3 \int_C^D \frac{ds}{G \delta}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для остальных двух контуров можно записать аналогичные выражения. В итоге для решения задачи получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha \Omega_1 &= T_1 \oint_{(1)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta}, \\ \alpha \Omega_2 &= -T_1 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta} + T_2 \oint_{(2)} \frac{ds}{G\delta} - T_3 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}, \\ \alpha \Omega_3 &= T_3 \oint_{(3)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Записанная система уравнений содержит 4 неизвестных: α , T_1 , T_2 , T_3 . Поэтому к этим уравнениям совместности деформаций нужно добавить еще одно уравнение статике (рис. 3.8). Если в сечении контура действует крутящий момент M , то должно выполняться условие

$$M = \oint T \rho ds \quad (3.22)$$

или

$$M = T_1 \Omega_1 + T_2 \Omega_2 + T_3 \Omega_3, \quad (3.23)$$

где через Ω обозначена удвоенная площадь, ограниченная средней линией контура.

На рис. 3.13 приведена эпюра погонных касательных сил в трехзамкнутом контуре при свободном кручении.

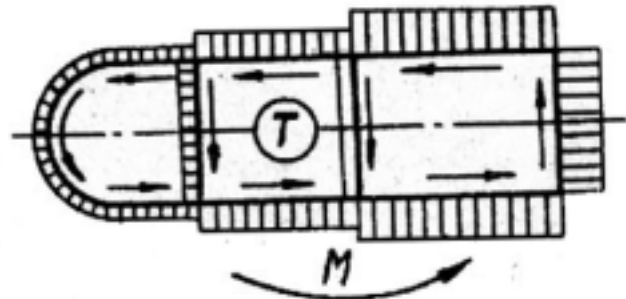


Рис. 3.13